Disuguaglianze di Harnack per operatori non variazionali modellati su campi di Hörmander

lavoro in collaborazione con L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni

Marco Bramanti

Politecnico di Milano

Roma, 23 novembre 2006

Introduzione. Operatori somme di quadrati di Hörmander

Consideriamo un sistema di campi vettoriali reali regolari, definiti in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\,\partial_{x_j} \qquad i = 1, 2, \ldots, q \quad (q \leq n)$$

che soddisfano in Ω la condizione di Hörmander al passo s.
Allora, (Hörmander, 1967 [1]) è noto che l'operatore differenziale del second'ordine "somme di quadrati di Hörmander"

$$L = \sum_{i=1}^{q} X_i^2$$

è ipoellittico in Ω, ossia: se $Lu = f$ in Ω nel senso delle distribuzioni, e $f \in C^\infty(A)$ con $A \subset \Omega$, allora $u \in C^\infty(A)$.
Analogamente, l'operatore evolutivo

$$H = \partial_t - \sum_{i=1}^{q} X_i^2$$

è ipoellittico in $\mathbb{R} \times \Omega$.

Strutture tipiche e spazi di funzioni associati a un sistema di campi di Hörmander

Struttura metrica. Distanza di Carnot-Carathéodory indotta dal sistema $X_1, \ldots, X_q$.

Definition

Sia Ω un dominio in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che una curva assolutamente continua $\gamma : [0, T] \to \Omega$ è subunitaria rispetto al sistema $X_1, X_2, \ldots, X_q$ se

$$\gamma'(t) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(t) X_j(\gamma(t))$$

per q.o. $t \in [0, T]$, con $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j(t)^2 \leq 1$ q.o. (Porremo $T = l(\gamma)$).
Per ogni $x, y \in \Omega$, definiamo

$$d(x, y) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ è } X\text{-subunitaria, } \gamma(0) = x, \gamma(l(\gamma)) = y\}.$$

Se i campi soddisfano la condizione di Hörmander, $d(x, y)$ è finita per ogni coppia di punti, ed è una distanza in Ω. (Teorema di Chow).

- E' noto che (Fefferman-Phong [1]):

$$c^{-1}|x-y| \leq d(x,y) \leq c|x-y|^{1/s} \quad \forall x,y \in K \Subset \Omega \tag{1}$$

(*s* passo della condizione di Hörmander). Perciò *d* induce l'usuale topologia in $\mathbb{R}^n$.

- E' noto che (Fefferman-Phong [1]):

$$c^{-1}|x-y| \leq d(x,y) \leq c|x-y|^{1/s} \quad \forall x,y \in K \Subset \Omega \tag{1}$$

(s passo della condizione di Hörmander). Perciò d induce l'usuale topologia in $\mathbb{R}^n$.

- Inoltre, la distanza CC è *localmente* doubling rispetto alla misura di Lebesgue measure:

$$|B(x,2r)| \leq c|B(x,r)| \tag{2}$$

almeno per x in un compatto e r limitato da qualche r_0.
(Sanchez-Calle [4], Nagel-Stein-Weinger [1])

- E' noto che (Fefferman-Phong [1]):

$$c^{-1}|x-y| \leq d(x,y) \leq c|x-y|^{1/s} \quad \forall x,y \in K \Subset \Omega \tag{1}$$

(s passo della condizione di Hörmander). Perciò d induce l'usuale topologia in $\mathbb{R}^n$.

- Inoltre, la distanza CC è *localmente* doubling rispetto alla misura di Lebesgue measure:

$$|B(x,2r)| \leq c\,|B(x,r)| \tag{2}$$

almeno per x in un compatto e r limitato da qualche r_0. (Sanchez-Calle [4], Nagel-Stein-Weinger [1])

- Useremo anche la "distanza CC parabolica" in $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$d_P((t,x),(s,y)) = \sqrt{d(x,y)^2 + |t-s|}$$

Per le sfere corispondenti $B_P((t,x),r)$ vale:

$$|B_P((t,x),r)|_{\mathbb{R}^{n+1}} \simeq r^2\,|B(x,r)|_{\mathbb{R}^n}\,.$$

Inoltre d_P è una distanza, che soddisfa una condizione di doubling locale.

L'uso dei campi X_i come sostituti naturali delle derivate "cartesiane" ∂_{x_i}, e la presenza di una distanza localmente doubling indotta dai campi, permettono di definire spazi di funzioni modellati sui questi campi vettoriali, come spazi di Hölder, spazi di Sobolev, *BMO*, *VMO etc.*, e consentono di adattare a questo contesto molti ragionamenti tipici di analisi reale (teoria degli spazi di tipo omogeneo di Coifman-Weiss, 1971). Introduciamo gli "spazi di Hölder CC-parabolici" relativi a d_P.

Definition

Per ogni $\alpha \in (0, 1]$ e dominio $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, sia:

$$|u|_{C^\alpha(U)} = \sup \left\{ \frac{|u(t,x) - u(s,y)|}{d_P((t,x),(s,y))^\alpha} : (t,x),(s,y) \in U, (t,x) \neq (s,y) \right\}$$

$$\|u\|_{C^\alpha(U)} = |u|_{C^\alpha(U)} + \|u\|_{L^\infty(U)}$$

$$C^\alpha(U) = \left\{ u : U \to \mathbb{R} : \|u\|_{C^\alpha(U)} < \infty \right\}.$$

Definition (segue)

Inoltre, per ogni intero positivo k e ogni dominio $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, sia

$$C^{k,\alpha}(U) = \left\{ u : U \to \mathbb{R} : \|u\|_{C^{k,\alpha}(U)} < \infty \right\}$$

con

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(U)} = \sum_{|I|+2h \leqslant k} \left\| \partial_t^h X^I u \right\|_{C^\alpha(U)}$$

dove, per ogni multiindice $I = (i_1, i_2, ..., i_s)$, con $1 \leqslant i_j \leqslant q$, diciamo che $|I| = s$ e

$$X^I u = X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_s} u.$$

Osserviamo esplicitamente che nella definizione di $C^{k,\alpha}$ assumiamo che le derivate di u coinvolte esistano come derivate intrinseche.

Struttura algebrica

In *certi esempi significativi* di sistemi di campi di Hörmander in $\mathbb{R}^n$ accade che $\mathbb{R}^n$ sia dotato di una struttura di "gruppo di Carnot", ossia: l'operatore

$$L = \sum_{i=1}^{q} X_i^2$$

è invariante per traslazioni a sinistra, rispetto ad un'operazione di gruppo di Lie, ed è omogeneo di grado 2 rispetto ad un'opportuna famiglia di dilatazioni (automorfismi di gruppo)

$$D(\lambda)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \ldots, \lambda^{\alpha_n} x_n\right); \alpha_i = 1 \text{ per } i = 1, 2, \ldots, q$$

$$L^x \left[f(y \circ x) \right] = \left(L^x f \right)(y \circ x)$$

$$L \left[f(D(\lambda) x) \right] = \lambda^2 (Lf)(D(\lambda) x)$$

- Allora (Folland, 1975 [4]) L possiede una soluzione fondamentale invariante per traslazioni e omogenea di grado $2-Q$, dove $Q>n$ è la "dimensione omogenea" del gruppo, $Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

$$\Gamma\left(D\left(\lambda\right)x\right)=\lambda^{2-Q}\Gamma\left(x\right)$$

Questo è il punto di partenza per l'applicazione a questo contesto dei risultati della teoria degli integrali singolari e frazionari in spazi di tipo omogeneo.

- Allora (Folland, 1975 [4]) L possiede una soluzione fondamentale invariante per traslazioni e omogenea di grado $2-Q$, dove $Q>n$ è la "dimensione omogenea" del gruppo, $Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

$$\Gamma\left(D\left(\lambda\right)x\right)=\lambda^{2-Q}\Gamma\left(x\right)$$

  Questo è il punto di partenza per l'applicazione a questo contesto dei risultati della teoria degli integrali singolari e frazionari in spazi di tipo omogeneo.

- Per l'operatore "parabolico" si ha il fenomeno analogo, con ∂_t omogeneo di grado 2:

$$D\left(\lambda\right)\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right)=\left(\lambda^2 t,\lambda^{\alpha_1}x_1,\lambda^{\alpha_2}x_2,...,\lambda^{\alpha_n}x_n\right)$$

  con $\alpha_i=1$ per $i=1,2,...,q$; esiste una soluzione fondamentale h, tale che
$$h\left(D\left(\lambda\right)\left(t,x\right)\right)=\lambda^{-Q}h\left(t,x\right).$$

Operatori non variazionali modellati su campi di Hörmander

- In anni recenti sono stati studiati anche operatori non variazionali, modellati sulle classi precedenti, ossia

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j \quad \text{o} \quad H = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(t,x) X_i X_j$$

sotto l'ipotesi che $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{q}$ sia una matrice reale simmetrica e uniformemente definita positiva, di funzioni definite in un dominio Ω o in un dominio limitato $U \subset \mathbb{R} \times \Omega$:

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \lambda |\xi|^2 \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^q.$$

Operatori non variazionali modellati su campi di Hörmander

- In anni recenti sono stati studiati anche operatori non variazionali, modellati sulle classi precedenti, ossia

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j \quad \text{o} \quad H = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(t,x) X_i X_j$$

  sotto l'ipotesi che $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{q}$ sia una matrice reale simmetrica e uniformemente definita positiva, di funzioni definite in un dominio Ω o in un dominio limitato $U \subset \mathbb{R} \times \Omega$:

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^q.$$

- E' naturale fare uso di spazi di funzioni definiti in termini del sistema di campi vettoriali $X_1, X_2, ..., X_q$ per esprimere la regolarità richiesta ai coefficienti a_{ij}. Ovviamente, non appena i coefficienti a_{ij} non sono C^∞, il corrispondente operatore *non è più ipoellittico*.

Principali risultati noti sulle equazioni non variazionali di tipo Hörmander

- Stime (locali) di tipo L^p sulle derivate "del second'ordine" $X_i X_j u$, per operatori a coefficienti VMO:
  Bramanti, Brandolini 2000 [3], [4]; estensione a stime BMO-BMO: [5].

Principali risultati noti sulle equazioni non variazionali di tipo Hörmander

- Stime (locali) di tipo L^p sulle derivate "del second'ordine" $X_i X_j u$, per operatori a coefficienti VMO:
  Bramanti, Brandolini 2000 [3], [4]; estensione a stime BMO-BMO: [5].
- Stime (locali) di tipo C^α sulle derivate "del second'ordine" $X_i X_j u$, per operatori (di evoluzione) a coefficienti Hölderiani:
  Bramanti, Brandolini 2006 [1]. Risultati precedenti in questa direzione: Xu 1992 [6], Capogna-Han 2003 [5].

- Esistenza di una soluzione fondamentale per l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j \text{ oppure } \partial_t - L$$

con coefficienti a_{ij} Hölderiani, e disuguaglianza di Harnack invariante per quest'operatore.

- Esistenza di una soluzione fondamentale per l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j \text{ oppure } \partial_t - L$$

con coefficienti a_{ij} Hölderiani, e disuguaglianza di Harnack invariante per quest'operatore.

  - Nel caso dei gruppi di Carnot:
    Bonfiglioli, Lanconelli, Uguzzoni [3] (2002) e [4] (2004); Bonfiglioli, Uguzzoni [5] (2004) e [6] (to appear).

- Esistenza di una soluzione fondamentale per l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j \text{ oppure } \partial_t - L$$

con coefficienti a_{ij} Hölderiani, e disuguaglianza di Harnack invariante per quest'operatore.

  - Nel caso dei gruppi di Carnot:
    Bonfiglioli, Lanconelli, Uguzzoni [3] (2002) e [4] (2004); Bonfiglioli, Uguzzoni [5] (2004) e [6] (to appear).
  - Nel caso di campi di Hörmander qualsiasi:
    M. Bramanti, L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Preprint 2006; *submitted [3]*; un annuncio dei risultati è apparso in: C. R. Math. Acad. Sci. Paris., ser. I, vol. 343 (2006), 463-466 [2].

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:
  - esistenza di una soluzione fondamentale localmente (cioè lontano dai poli) $C^{2,\alpha}$ e sue proprietà di base;

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:
  - esistenza di una soluzione fondamentale localmente (cioè lontano dai poli) $C^{2,\alpha}$ e sue proprietà di base;
  - stime gaussiane da sopra e da sotto per la soluzione fondamentale; stime gaussiane da sopra per il modulo delle derivate $(X_i h,\ X_i X_j h,\ \partial_t h)$;

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:
  - esistenza di una soluzione fondamentale localmente (cioè lontano dai poli) $C^{2,\alpha}$ e sue proprietà di base;
  - stime gaussiane da sopra e da sotto per la soluzione fondamentale; stime gaussiane da sopra per il modulo delle derivate $(X_i h,\ X_i X_j h,\ \partial_t h)$;
  - disuguaglianza di Harnack (parabolica e stazionaria) invariante per dilatazioni.

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:
  - esistenza di una soluzione fondamentale localmente (cioè lontano dai poli) $C^{2,\alpha}$ e sue proprietà di base;
  - stime gaussiane da sopra e da sotto per la soluzione fondamentale; stime gaussiane da sopra per il modulo delle derivate $(X_i h, X_i X_j h, \partial_t h)$;
  - disuguaglianza di Harnack (parabolica e stazionaria) invariante per dilatazioni.
- Nel caso dei gruppi i risultati riguardano sia l'operatore evolutivo che quello stazionario.

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:
  - esistenza di una soluzione fondamentale localmente (cioè lontano dai poli) $C^{2,\alpha}$ e sue proprietà di base;
  - stime gaussiane da sopra e da sotto per la soluzione fondamentale; stime gaussiane da sopra per il modulo delle derivate $(X_i h, X_i X_j h, \partial_t h)$;
  - disuguaglianza di Harnack (parabolica e stazionaria) invariante per dilatazioni.
- Nel caso dei gruppi i risultati riguardano sia l'operatore evolutivo che quello stazionario.
- Nel caso generale, si studia la soluzione fondamentale per l'operatore di evoluzione, e si deduce Harnack in versione parabolica (e quindi stazionaria).

- I risultati raggiunti in questi lavori, complessivamente, riguardano:
  - esistenza di una soluzione fondamentale localmente (cioè lontano dai poli) $C^{2,\alpha}$ e sue proprietà di base;
  - stime gaussiane da sopra e da sotto per la soluzione fondamentale; stime gaussiane da sopra per il modulo delle derivate $(X_i h, X_i X_j h, \partial_t h)$;
  - disuguaglianza di Harnack (parabolica e stazionaria) invariante per dilatazioni.
- Nel caso dei gruppi i risultati riguardano sia l'operatore evolutivo che quello stazionario.
- Nel caso generale, si studia la soluzione fondamentale per l'operatore di evoluzione, e si deduce Harnack in versione parabolica (e quindi stazionaria).
- Nel seguito di questa esposizione si presenteranno i principali risultati di questo lavoro e si darà un'idea della linea dimostrativa seguita, con particolare attenzione alla disuguaglianza di Harnack.

Ipotesi e risultati

Sia H un operatore del tipo:

$$H = \partial_t - L = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(t,x) X_i X_j - \sum_{k=1}^{q} a_k(t,x) X_k - a_0(t,x)$$

dove $X_1, X_2, ..., X_q$ sono campi vettoriali di Hörmander in un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0 sono (limitati e) d_P-Hölderiani in un cilindro $\mathcal{C} = (T_1, T_2) \times \Omega$ $(-\infty \leq T_1 < T_2 \leq \infty)$, e la matrice $\{a_{ij}\}$ è simmetrica e uniformemente definita positiva sullo stesso cilindro:

$$\lambda^{-1} |w|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(t,x) w_i w_j \leq \lambda |w|^2 \;\; \forall w \in \mathbb{R}^q, (t,x) \in (T_1, T_2) \times \Omega.$$

Allora:

Theorem (Soluzione fondamentale locale per H)

Per ogni dominio $\Omega' \Subset \Omega$, esiste una funzione

$$h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

tale che, ponendo $\mathcal{C}' = (T_1, T_2) \times \Omega'$, si ha:

i) *h è continua fuori dalla diagonale di $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$;*

ii) *$h\,(t, x; \tau, \xi)$ è non negativa, e si annulla per $t \leq \tau$;*

iii) *per ogni fissato $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si ha*

$$h(\cdot; \tau, \xi) \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathcal{C}' \setminus \{(\tau, \xi)\}), \quad H\,(h(\cdot; \tau, \xi)) = 0 \text{ in } \mathcal{C}' \setminus \{(\tau, \xi)\};$$

Theorem (segue)

iv) *esiste $T > 0$, dipendente da Ω', tale che per ogni (t, x), $(\tau, \xi) \in \mathcal{C}'$, $0 < t - \tau \leq T$, valgono le seguenti stime:*

$$c^{-1} E(x, \xi, c^{-1}(t-\tau)) \leq h(t, x; \tau, \xi) \leq c\, E(x, \xi, c(t-\tau)),$$

$$|X_j\,(h(t, \cdot; \tau, \xi))\,(x)| \leq c(t-\tau)^{-1/2}\, E(x, \xi, c(t-\tau));$$

$$|X_i X_j\,(h(t, \cdot; \tau, \xi))\,(x)| \leq c(t-\tau)^{-1}\, E(x, \xi, c(t-\tau))$$

$$|\partial_t\,(h(\cdot, x; \tau, \xi))\,(t)| \leq c(t-\tau)^{-1}\, E(x, \xi, c(t-\tau))$$

dove

$$E(x, \xi, t) = |B(x, \sqrt{t})|^{-1} \exp\left(-\frac{d(x, \xi)^2}{t}\right)$$

e c è una costante positiva che dipende solo dai campi vettoriali X_i, le norme di Hölder dei coefficienti, il numero λ e i domini Ω, Ω';

Theorem (segue)

v) *per ogni* $f \in C_0^\alpha(\mathcal{C}')$, *la funzione*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi)\, d\tau d\xi$$

appartiene a $C^{2,\alpha}_{loc}(\mathcal{C}')$ *e risolve l'equazione*

$$Hu = f \text{ in } \mathcal{C}'$$

vi) *vale la seguente proprietà di riproduzione*

$$h(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t,x;s,y)\, h(s,y;\tau,\xi)\, dy,$$

per $t > s > \tau$ *e* $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Theorem (Disuguaglianza di Harnack parabolica)

Supponiamo che H soddisfi tutte le ipotesi sopra elencate; inoltre, sia $a_0 \equiv 0$. Per ogni dominio $\Omega' \Subset \Omega$ esiste una costante $R_0 > 0$ tale che, per ogni $0 < h_1 < h_2 < 1$ e $\gamma \in (0,1)$, esiste $M > 0$, dipendente solo da $h_1, h_2, \gamma, \Omega, \Omega', \lambda$, i campi vettoriali X_i e la norma di Hölder dei coefficienti, tale che per ogni $(\tau_0, \xi_0) \in \mathcal{C}' = (T_1, T_2) \times \Omega'$, $R \in (0, R_0]$ e ogni

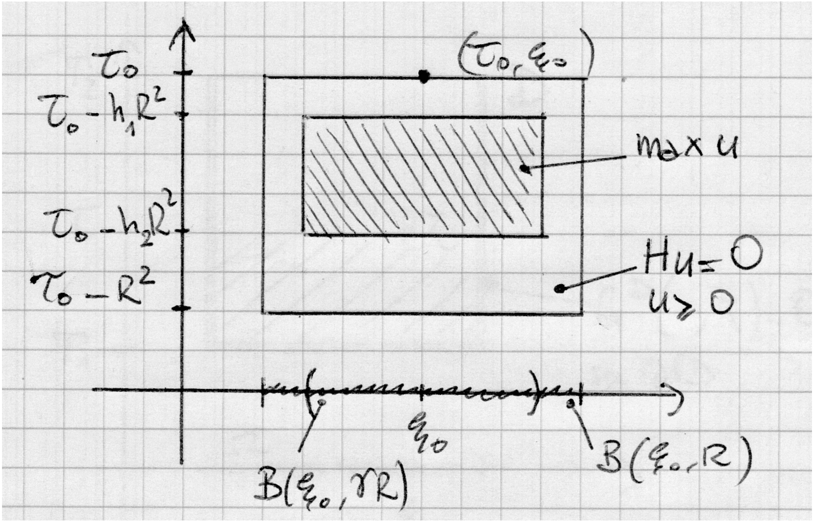
$$u \in \mathfrak{C}^2((\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)) \cap C([\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)})$$

soddisfacente

$$Hu = 0, u \geq 0 \ in \ (\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R),$$

si ha

$$\max_{[\tau_0 - h_2 R^2, \tau_0 - h_1 R^2] \times \overline{B(\xi_0, \gamma R)}} u \leq M\, u(\tau_0, \xi_0).$$



(τ_0, ξ_0)
τ_0
$\tau_0 - h_1 R^2$
$\tau_0 - h_2 R^2$
$\tau_0 - R^2$
max u
$Hu = 0$
$u \geq 0$
ξ_0
$B(\xi_0, \gamma R)$
$B(\xi_0, R)$

In particolare, vale la seguente versione stazionaria:

Theorem (Disuguaglianza di Harnack per operatori stazionari)

Sia L come sopra, e sia $R_0 > 0$. Esiste una costante positiva $M = \mathbf{c}(R_0)$ tale che per ogni $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in (0, R_0]$ e ogni $u \in \mathfrak{C}^2(B(\xi_0, 3R))$ soddisfacente

$$Lu = 0, \ u \geq 0, \ \text{in } B(\xi_0, 3R)$$

si ha

$$\max_{B(\xi_0,R)} u \leq M \min_{B(\xi_0,R)} u.$$

La linea dimostrativa: uno sguardo dall'alto

L'idea di base

La strategia che seguiamo per dimostrare la disuguaglianza di Harnack parabolica è quella di Fabes-Stroock 1986 [2]. Ricordiamo qualche tappa storica nella dimostrazione di Harnack ellittico e parabolico.

- 1956-1957, De Giorgi [1], [2]: hölderianità delle soluzioni dell'equazione ellittica variazionale a coefficienti L^∞.

La linea dimostrativa: uno sguardo dall'alto

L'idea di base

La strategia che seguiamo per dimostrare la disuguaglianza di Harnack parabolica è quella di Fabes-Stroock 1986 [2]. Ricordiamo qualche tappa storica nella dimostrazione di Harnack ellittico e parabolico.

- 1956-1957, De Giorgi [1], [2]: hölderianità delle soluzioni dell'equazione ellittica variazionale a coefficienti L^∞.
- 1958, Nash [2]: dimostra l'hölderianità delle soluzioni dell'equazione parabolica ed ellittica variazionale, sfruttando opportune stime sulla soluzione fondamentale dell'operatore parabolico. In appendice, lo sketch della dimostrazione di Harnack parabolico.

La linea dimostrativa: uno sguardo dall'alto

L'idea di base

La strategia che seguiamo per dimostrare la disuguaglianza di Harnack parabolica è quella di Fabes-Stroock 1986 [2]. Ricordiamo qualche tappa storica nella dimostrazione di Harnack ellittico e parabolico.

- 1956-1957, De Giorgi [1], [2]: hölderianità delle soluzioni dell'equazione ellittica variazionale a coefficienti L^∞.
- 1958, Nash [2]: dimostra l'hölderianità delle soluzioni dell'equazione parabolica ed ellittica variazionale, sfruttando opportune stime sulla soluzione fondamentale dell'operatore parabolico. In appendice, lo sketch della dimostrazione di Harnack parabolico.
- 1960, Moser [3]: nuova dimostrazione del teorema di De Giorgi;

La linea dimostrativa: uno sguardo dall'alto

L'idea di base

La strategia che seguiamo per dimostrare la disuguaglianza di Harnack parabolica è quella di Fabes-Stroock 1986 [2]. Ricordiamo qualche tappa storica nella dimostrazione di Harnack ellittico e parabolico.

- 1956-1957, De Giorgi [1], [2]: hölderianità delle soluzioni dell'equazione ellittica variazionale a coefficienti L^∞.
- 1958, Nash [2]: dimostra l'hölderianità delle soluzioni dell'equazione parabolica ed ellittica variazionale, sfruttando opportune stime sulla soluzione fondamentale dell'operatore parabolico. In appendice, lo sketch della dimostrazione di Harnack parabolico.
- 1960, Moser [3]: nuova dimostrazione del teorema di De Giorgi;
- 1961, Moser [4]: dimostra Harnack (invariante per dilatazioni) per l'equazione ellittica variazionale, e mostra che Harnack implica l'hölderianità (ulteriore dimostrazione del teorema di De Giorgi), in maniera "assiomatica" (in particolare, questa implicazione logica vale anche se l'equazione è nonvariazionale -Harnack non variazionale, però, sarà dimostrato quasi 20 anni dopo).

- 1964, Moser [5]: Harnack parabolico (lo sketch di Nash non era considerato sufficiente).

- 1964, Moser [5]: Harnack parabolico (lo sketch di Nash non era considerato sufficiente).
- 1978, Aronson [1]: dimostra la stima Gaussiana dal basso e dall'alto per la soluzione fondamentale dell'operatore parabolico variazionale a coefficienti L^{∞}, utilizzando Harnack parabolico (Moser 1964).

- 1964, Moser [5]: Harnack parabolico (lo sketch di Nash non era considerato sufficiente).
- 1978, Aronson [1]: dimostra la stima Gaussiana dal basso e dall'alto per la soluzione fondamentale dell'operatore parabolico variazionale a coefficienti L^∞, utilizzando Harnack parabolico (Moser 1964).
- 1979-1980, Krylov-Safonov [5], [1], [1] dimostrano Harnack (e quindi, via Moser 1961, l'hölderianità delle soluzioni) per operatori ellittici *non variazionali* a coefficienti L^∞.

- 1964, Moser [5]: Harnack parabolico (lo sketch di Nash non era considerato sufficiente).
- 1978, Aronson [1]: dimostra la stima Gaussiana dal basso e dall'alto per la soluzione fondamentale dell'operatore parabolico variazionale a coefficienti L^∞, utilizzando Harnack parabolico (Moser 1964).
- 1979-1980, Krylov-Safonov [5], [1], [1] dimostrano Harnack (e quindi, via Moser 1961, l'hölderianità delle soluzioni) per operatori ellittici *non variazionali* a coefficienti L^∞.
- 1986, Fabes-Stroock [2]: per l'operatore parabolico variazionale a coefficienti L^∞, mostrano come con la tecnica di Nash, messa a punto grazie anche alle idee di Krylov-Safonov, si possano ridimostrare le stime Gaussiane di Aronson direttamente (cioè senza usare Harnack), da queste si possa ricavare un Harnack parabolico invariante per dilatazioni (Nash-Moser), e quindi l'hölderianità delle soluzioni (Nash), "invertendo così l'ordine cronologico in cui questi risultati sono stati dimostrati storicamente".

A New Proof of Moser's Parabolic Harnack Inequality Using the old Ideas of Nash

E. B. FABES & D. W. STROOCK

Dedicated to J. Serrin on the occasion of his 60th birthday

Introduction

In 1958 NASH published his fundamental work on the local Hölder continuity of solutions of second-order parabolic equations with coefficients which need not be smooth ([8]). The primary purpose of that work was to study the properties of the fundamental solution corresponding to the parabolic operator and from these properties to derive regularity for a general solution. Though the work is often cited in the literature about weak solutions of elliptic and parabolic equations, one feels that NASH's ideas were never fully understood (and maybe still are not) and that because of this the more understandable and seemingly more fruitful ideas of DE GIORGI ([4]) and MOSER ([6], [7]) were subsequently adopted.

In the present article, we return to NASH's ideas. In particular, by modifying and persuing his arguments, we establish directly what we feel is the logical goal of this line of reasoning, namely: the estimates for the fundamental solution first proved by D. G. ARONSON. (See [1] and [2].) From ARONSON's estimates the parabolic Harnack inequality of MOSER ([7]) and, consequently (as was shown by MOSER [7, p. 108]), NASH's local HÖLDER continuity of weak solutions to parabolic equations follow. That is, our approach reverses the chronological order in which these results were derived originally.

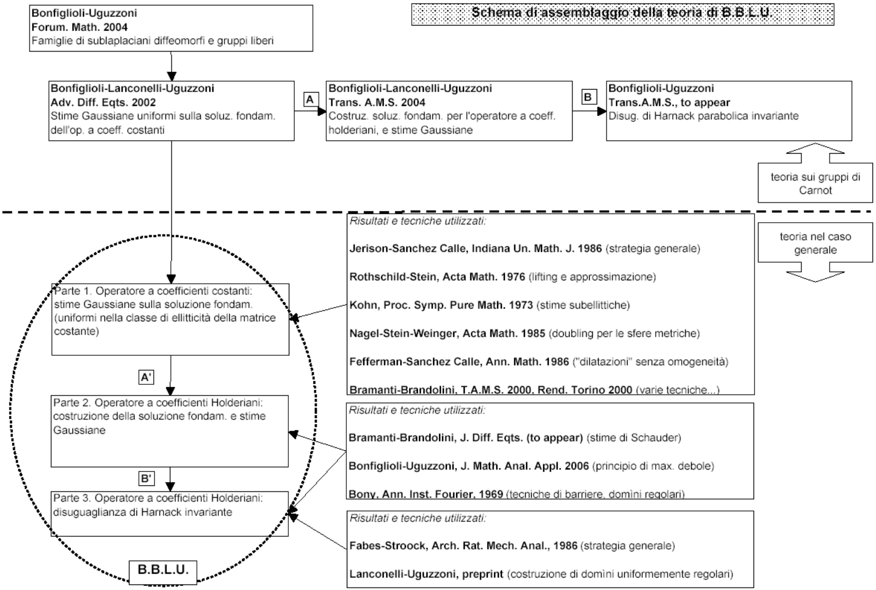
- Fabes-Stroock hanno messo in luce per la prima volta un nesso di tipo “assiomatico” tra stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale di un’equazione parabolica e disuguaglianza di Harnack parabolica invariante per dilatazioni, segnando una strada che può essere percorsa anche in situazioni molto diverse. (v. anche il libro di Saloff-Coste 2002 [2] per l’illustrazione, nel caso degli operatori uniformemente parabolici su varietà riemanniane, di queste relazioni di tipo assiomatico). Ad esempio:

- Fabes-Stroock hanno messo in luce per la prima volta un nesso di tipo “assiomatico” tra stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale di un’equazione parabolica e disuguaglianza di Harnack parabolica invariante per dilatazioni, segnando una strada che può essere percorsa anche in situazioni molto diverse. (v. anche il libro di Saloff-Coste 2002 [2] per l’illustrazione, nel caso degli operatori uniformemente parabolici su varietà riemanniane, di queste relazioni di tipo assiomatico). Ad esempio:
- Kusuoka-Stroock, 1987 [3]: applicano le stesse idee (insieme però alle tecniche probabilistiche del “calcolo di Malliavin”) nel contesto degli operatori di Hörmander’ $\partial_t - \sum_{i=1}^{q} X_i^2$.

- Fabes-Stroock hanno messo in luce per la prima volta un nesso di tipo "assiomatico" tra stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale di un'equazione parabolica e disuguaglianza di Harnack parabolica invariante per dilatazioni, segnando una strada che può essere percorsa anche in situazioni molto diverse. (v. anche il libro di Saloff-Coste 2002 [2] per l'illustrazione, nel caso degli operatori uniformemente parabolici su varietà riemanniane, di queste relazioni di tipo assiomatico). Ad esempio:
- Kusuoka-Stroock, 1987 [3]: applicano le stesse idee (insieme però alle tecniche probabilistiche del "calcolo di Malliavin") nel contesto degli operatori di Hörmander' $\partial_t - \sum_{i=1}^{q} X_i^2$.
- La stessa strategia generale di Fabes-Stroock è stata adottata da Bonfiglioli, Lanconelli, Uguzzoni per provare la disuguaglianza di Harnack per operatori "parabolici" nonvariazionali modellati su campi di Hörmander su un gruppo di Carnot.

- Fabes-Stroock hanno messo in luce per la prima volta un nesso di tipo "assiomatico" tra stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale di un'equazione parabolica e disuguaglianza di Harnack parabolica invariante per dilatazioni, segnando una strada che può essere percorsa anche in situazioni molto diverse. (v. anche il libro di Saloff-Coste 2002 [2] per l'illustrazione, nel caso degli operatori uniformemente parabolici su varietà riemanniane, di queste relazioni di tipo assiomatico). Ad esempio:
- Kusuoka-Stroock, 1987 [3]: applicano le stesse idee (insieme però alle tecniche probabilistiche del "calcolo di Malliavin") nel contesto degli operatori di Hörmander' $\partial_t - \sum_{i=1}^{q} X_i^2$.
- La stessa strategia generale di Fabes-Stroock è stata adottata da Bonfiglioli, Lanconelli, Uguzzoni per provare la disuguaglianza di Harnack per operatori "parabolici" nonvariazionali modellati su campi di Hörmander su un gruppo di Carnot.
- La stessa idea è quella che abbiamo seguito in [3] nel caso generale, cioè quando gli $\{X_i\}$ sono campi di Hörmander qualsiasi.

Lo schema di assemblaggio



La linea dimostrativa: uno sguardo più da vicino. La marcia di avvicinamento

1. Estensione a tutto lo spazio di un operatore modellato su campi definiti localmente

- Inizialmente, i campi vettoriali X_i sono definiti (e soddisfano Hörmander) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0 sono definiti (e soddisfano le ipotesi di Hölderianità ed ellitticità) nel cilindro $(0, T) \times \Omega$.

La linea dimostrativa: uno sguardo più da vicino. La marcia di avvicinamento

1. Estensione a tutto lo spazio di un operatore modellato su campi definiti localmente

- Inizialmente, i campi vettoriali X_i sono definiti (e soddisfano Hörmander) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0 sono definiti (e soddisfano le ipotesi di Hölderianità ed ellitticità) nel cilindro $(0, T) \times \Omega$.
- Trattando di soluzioni fondamentali, è opportuno lavorare con un operatore definito su tutto lo spazio.

La linea dimostrativa: uno sguardo più da vicino. La marcia di avvicinamento

1. Estensione a tutto lo spazio di un operatore modellato su campi definiti localmente

- Inizialmente, i campi vettoriali X_i sono definiti (e soddisfano Hörmander) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0 sono definiti (e soddisfano le ipotesi di Hölderianità ed ellitticità) nel cilindro $(0, T) \times \Omega$.
- Trattando di soluzioni fondamentali, è opportuno lavorare con un operatore definito su tutto lo spazio.
- Perciò estendiamo H a tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, in modo tale che, fuori da un insieme compatto delle variabili spaziali, coincida con l'operatore del calore classico, e quindi studiamo la soluzione fondamentale di questo operatore prolungato, e proviamo per questo la disugugalianza di Harnack.

La linea dimostrativa: uno sguardo più da vicino. La marcia di avvicinamento

1. Estensione a tutto lo spazio di un operatore modellato su campi definiti localmente

- Inizialmente, i campi vettoriali X_i sono definiti (e soddisfano Hörmander) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0 sono definiti (e soddisfano le ipotesi di Hölderianità ed ellitticità) nel cilindro $(0, T) \times \Omega$.
- Trattando di soluzioni fondamentali, è opportuno lavorare con un operatore definito su tutto lo spazio.
- Perciò estendiamo H a tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, in modo tale che, fuori da un insieme compatto delle variabili spaziali, coincida con l'operatore del calore classico, e quindi studiamo la soluzione fondamentale di questo operatore prolungato, e proviamo per questo la disugugalianza di Harnack.
- Alla fine del lavoro, si mostra come ritornare al nostro operatore originario, deducendo risultati locali dai precedenti teoremi globali.

Theorem

Sia $Z = (Z_1, \ldots, Z_q)$ *un sistema di campi vettoriali definiti in un dominio limitato* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e ivi soddisfacente la condizione di Hörmander al passo* s. *Allora, comunque presi dei domini* $\Omega_1 \Subset \Omega_0 \Subset \Omega$, *esiste un nuovo sistema di campi* $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$ $(m = q + n)$, *definito in tutto* $\mathbb{R}^n$ *e soddisfacente la condizione di Hörmander al passo* s *in tutto* $\mathbb{R}^n$; *inoltre:*

$$X = (Z_1, Z_2, ..., Z_q, 0, 0, ..., 0) \text{ in } \Omega_1;$$
$$X = (0, 0, ..., 0, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_n}) \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega_0.$$

Infine, se d_Z,d_X, *indicano le distanze CC indotte da* Z *in* Ω *e da* X *in* $\mathbb{R}^n$:

1. *per ogni dominio* $\Omega_2 \Subset \Omega_1$, d_X *è equivalente a* d_Z *in* Ω_2;
2. d_X *è equivalente alla distanza Euclidea in* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$;
3. d_X *soddisfa una condizione doubling globale:*

$$|B(x, 2r)| \leq c\,|B(x, r)| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Con un uso opportuno di funzioni cutoff si prolungano poi anche i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0, e si ottiene un nuovo operatore, che estende a tutto lo spazio il nostro operatore di partenza, e ha queste proprietà:

- I campi X_i sono di Hörmander in tutto $\mathbb{R}^n$ e costanti fuori da un compatto; perciò il corrispondente operatore modello (a coefficienti a_{ij} costanti)

$$\partial_t - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_i X_j$$

  ha una soluzione fondamentale in tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ (per risultati generali di Kusuoka-Stroock [2] o di Lanconelli-Pascucci [5]).

Con un uso opportuno di funzioni cutoff si prolungano poi anche i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0, e si ottiene un nuovo operatore, che estende a tutto lo spazio il nostro operatore di partenza, e ha queste proprietà:

- I campi X_i sono di Hörmander in tutto $\mathbb{R}^n$ e costanti fuori da un compatto; perciò il corrispondente operatore modello (a coefficienti a_{ij} costanti)

$$\partial_t - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_i X_j$$

  ha una soluzione fondamentale in tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ (per risultati generali di Kusuoka-Stroock [2] o di Lanconelli-Pascucci [5]).
- I campi inducono una distanza in $\mathbb{R}^n$, e una distanza parabolica in $\mathbb{R}^{n+1}$, rispetto a cui la misura di Lebesgue è globalmente doubling.

Con un uso opportuno di funzioni cutoff si prolungano poi anche i coefficienti a_{ij}, a_k, a_0, e si ottiene un nuovo operatore, che estende a tutto lo spazio il nostro operatore di partenza, e ha queste proprietà:

- I campi X_i sono di Hörmander in tutto $\mathbb{R}^n$ e costanti fuori da un compatto; perciò il corrispondente operatore modello (a coefficienti a_{ij} costanti)
$$\partial_t - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_i X_j$$
ha una soluzione fondamentale in tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ (per risultati generali di Kusuoka-Stroock [2] o di Lanconelli-Pascucci [5]).
- I campi inducono una distanza in $\mathbb{R}^n$, e una distanza parabolica in $\mathbb{R}^{n+1}$, rispetto a cui la misura di Lebesgue è globalmente doubling.
- I coefficienti (variabili) a_{ij}, a_k, a_0 soddisfano le ipotesi (globali) di Hölderianità ed ellitticità, con costanti controllate da quelle dell'operatore originario. Inoltre, la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ ha la seguente struttura:
$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m} = \begin{bmatrix} \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{q} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

2. Soluzione fondamentale di operatori nonvariazionali a coefficienti Hölderiani, definiti su tutto lo spazio

(E' questo il contenuto della Parte 2 del lavoro). Ponendo:

$$\mathbf{E}(x,\xi,t) = \left|B(x,\sqrt{t})\right|^{-1} \exp\left(-\frac{d(x,\xi)^2}{t}\right), \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n,\ t>0.$$

$$z = (t,x)\,;\zeta = (\tau,\xi);\eta = (s,y).$$

si ha che esiste $h\left(z,\zeta\right)$, continua fuori dalla diagonale, non negativa, nulla per $t \leq \tau$, tale che

$$h(\cdot;\zeta) \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\zeta\}), \quad H\left(h(\cdot;\zeta)\right) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\zeta\} \ \ \forall\zeta\in\mathbb{R}^{n+1}$$

e valgono le stime Gaussiane:

$$\mathbf{c}(T)^{-1}\mathbf{E}(x,\xi,\mathbf{c}^{-1}(t-\tau)) \leq h(z;\zeta) \leq \mathbf{c}(T)\,\mathbf{E}(x,\xi,\mathbf{c}(t-\tau)),$$

$$\left|X_j\left(h(\cdot;\zeta)\right)(z)\right| \leq \mathbf{c}(T)\,(t-\tau)^{-1/2}\,\mathbf{E}(x,\xi,\mathbf{c}(t-\tau));$$

$$\left|X_iX_j\left(h(\cdot;\zeta)\right)(z)\right| + \left|\partial_t\left(h(\cdot;\zeta)\right)(z)\right| \leq \mathbf{c}(T)\,(t-\tau)^{-1}\,\mathbf{E}(x,\xi,\mathbf{c}(t-\tau))$$

per ogni $T>0, z,\,\zeta\in\mathbb{R}^{n+1}$, $0<t-\tau\leq T$.

3. Alcuni risultati di supporto

Definiamo anzitutto il seguente spazio di funzioni:

Definition

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto. Indichiamo con $\mathfrak{C}^2(U)$ la classe delle funzioni $u(t,x)$ definite in U che sono continue in U nella coppia (t,x) e tali che $u(t,\cdot)$ ha derivate intrinseche fino al second'ordine rispetto ai campi vettoriali $X_1,\ldots,X_m$ continue (rispetto a x, per ogni t fissato) e $u(\cdot,x)$ ha derivata rispetto a t (per ogni x fissato), continue, nei rispettivi domini di definizione.

Theorem (Principio di massimo debole, v. [1])

Sia $U = (0,T) \times \Omega$ *un cilindro limitato in* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Se*

$$u \in \mathfrak{C}^2(U),\ Hu \leq 0 \text{ in } U, \text{ e } \limsup_{z \to \zeta,\ z \in U} u(z) \leq 0\ \forall \zeta \in \partial_p U,$$

allora $u \leq 0$ *in* U.

Theorem (Stime di Schauder per H, v. [1])

Per ogni dominio $U' \Subset U$ esiste una costante $\mathbf{c}(U, U') > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(U)$ con $Hu \in C^{\alpha}(U)$ si ha

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(U')} \leq \mathbf{c}\left(U, U'\right)\left\{\|Hu\|_{C^{\alpha}(U)} + \|u\|_{L^{\infty}(U)}\right\}.$$

Ricordiamo che l'esponente α è quello che compare nelle nostre ipotesi sui coefficienti di H.

Theorem (mollificatori su C^{β}, v. [1])

Sia $\mathbf{h}(t, x, y)$ la soluzione fondamentale dell'operatore

$$\mathbf{H} = \partial_t - \mathbf{L} = \partial_t - \sum_{i=1}^{m} X_i^2,$$

fissiamo una funzione test positiva $\eta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tale che $\int \eta(t)\, dt = 1$ e poniamo

$$\phi_{\varepsilon}(t, x, y) = \varepsilon^{-1}\mathbf{h}(\varepsilon, x, y)\, \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Theorem (segue)

Per ogni $\beta \in (0,1)$, $f \in C^{\beta}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ *sia*

$$f_{\varepsilon}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \phi_{\varepsilon}(t-s,x,y)\, f(s,y)\, dsdy.$$

Allora:

$$\|f_{\varepsilon}\|_{C^{\beta}} \leq c\, \|f\|_{C^{\beta}}$$

con c *indipendente da* f, ε;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_{\varepsilon} - f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})} = 0;$$

se a_{ij} *soddisfa la condizione di ellitticità, allora* a_{ij}^{ε} *soddisfa la stessa condizione, con costante di ellitticità indipendente da* ε.

Ci servirà anche il seguente lemma di compattezza:

Lemma

Sia $\{u_j\}$ una successione limitata in $C^{k,\beta}(U)$, per qualche intero positivo k, qualche $\beta \in (0,1)$, e U dominio limitato di $\mathbb{R}^{n+1}$. Allora, esiste una sottosuccessione u_{j_h} e una funzione $u \in C^{k,\beta}(U)$ tale che

$$\partial_t^m X^I u_{j_h} \to \partial_t^m X^I u$$

uniformemente in U per ogni m, I con $2m + |I| \leq k$.

Nel vivo della dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

- La tecnica di Fabes-Stroock consiste nel dedurre Harnack dalle stime Gaussiane per la *funzione di Green del cilindro*, stime a loro volta dedotte dalle analoghe stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale.

Nel vivo della dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

- La tecnica di Fabes-Stroock consiste nel dedurre Harnack dalle stime Gaussiane per la *funzione di Green del cilindro*, stime a loro volta dedotte dalle analoghe stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale.
- Per prima cosa dobbiamo quindi garantire l'*esistenza* della funzione di Green.

Nel vivo della dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

- La tecnica di Fabes-Stroock consiste nel dedurre Harnack dalle stime Gaussiane per la *funzione di Green del cilindro*, stime a loro volta dedotte dalle analoghe stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale.
- Per prima cosa dobbiamo quindi garantire l'*esistenza* della funzione di Green.
- Primo problema: per l'operatore H a coefficienti Hölderiani, l'esistenza della funzione di Green non è (ancora) garantita.

Nel vivo della dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

- La tecnica di Fabes-Stroock consiste nel dedurre Harnack dalle stime Gaussiane per la *funzione di Green del cilindro*, stime a loro volta dedotte dalle analoghe stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale.
- Per prima cosa dobbiamo quindi garantire l'*esistenza* della funzione di Green.
- Primo problema: per l'operatore H a coefficienti Hölderiani, l'esistenza della funzione di Green non è (ancora) garantita.
- Perciò il primo passo è studiare la funzione di Green sotto l'ipotesi (qualitativa) di coefficienti regolari, e dedurre la disuguaglianza di Harnack per operatori a coefficienti regolari.

Nel vivo della dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

- La tecnica di Fabes-Stroock consiste nel dedurre Harnack dalle stime Gaussiane per la *funzione di Green del cilindro*, stime a loro volta dedotte dalle analoghe stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale.
- Per prima cosa dobbiamo quindi garantire l'*esistenza* della funzione di Green.
- Primo problema: per l'operatore H a coefficienti Hölderiani, l'esistenza della funzione di Green non è (ancora) garantita.
- Perciò il primo passo è studiare la funzione di Green sotto l'ipotesi (qualitativa) di coefficienti regolari, e dedurre la disuguaglianza di Harnack per operatori a coefficienti regolari.
- Poiché le stime sulla funzione di Green saranno dedotte dalle analoghe stime sulla soluzione fondamentale, stabilite in precedenza, tutte le costanti dipenderanno dai coefficienti a_{ij}, a_k solo mediante le loro norme C^α e la costante di ellitticità.

Nel vivo della dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

- La tecnica di Fabes-Stroock consiste nel dedurre Harnack dalle stime Gaussiane per la *funzione di Green del cilindro*, stime a loro volta dedotte dalle analoghe stime Gaussiane sulla soluzione fondamentale.
- Per prima cosa dobbiamo quindi garantire l'*esistenza* della funzione di Green.
- Primo problema: per l'operatore H a coefficienti Hölderiani, l'esistenza della funzione di Green non è (ancora) garantita.
- Perciò il primo passo è studiare la funzione di Green sotto l'ipotesi (qualitativa) di coefficienti regolari, e dedurre la disuguaglianza di Harnack per operatori a coefficienti regolari.
- Poiché le stime sulla funzione di Green saranno dedotte dalle analoghe stime sulla soluzione fondamentale, stabilite in precedenza, tutte le costanti dipenderanno dai coefficienti a_{ij}, a_k solo mediante le loro norme C^α e la costante di ellitticità.
- Mediante un passaggio al limite si otterrà Harnack nel caso non regolare.

- Secondo problema: anche per l'operatore a coefficienti regolari, che è ipoellittico e soddisfa le ipotesi della teoria classica sviluppata da Bony [2], il cilindro che ha per base una sfera metrica potrebbe essere un dominio irregolare per il problema di Dirichlet, per cui l'esistenza della funzione di Green per questi domini rimane ancora problematica.

- Secondo problema: anche per l'operatore a coefficienti regolari, che è ipoellittico e soddisfa le ipotesi della teoria classica sviluppata da Bony [2], il cilindro che ha per base una sfera metrica potrebbe essere un dominio irregolare per il problema di Dirichlet, per cui l'esistenza della funzione di Green per questi domini rimane ancora problematica.
- Lanconelli e Uguzzoni [2] hanno provato che una sfera metrica può essere sempre approssimata (in un senso che preciseremo) da un dominio regolare per il problema di Dirichlet (stazionario).

1. Funzione di Green per operatori a coefficienti regolari su domini regolari

Definition

Diciamo che un cilindro limitato

$$D = (T_1, T_2) \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

è H-regolare, se per ogni funzione continua φ sulla frontiera parabolica $\partial_p D = ([T_1, T_2] \times \partial\Omega) \cup (\{T_1\} \times \overline{\Omega})$,esiste una soluzione u_φ di

$$u \in C^\infty(D) \cap C(D \cup \partial_p D), \quad Hu = 0 \text{ in } D, \quad u = \varphi \text{ in } \partial_p D. \tag{3}$$

Diremo che un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è H-regolare se, per ogni $T_1 < T_2$, il cilindro $(T_1, T_2) \times \Omega$ è H-regolare.

Per il principio di massimo, se D è un dominio H-regolare, per ogni $z \in D$ fissato, il funzionale lineare

$$\begin{aligned} T &: C(\partial_p D) \to \mathbb{R}, \\ T &: \varphi \longmapsto u_\varphi(z) \text{ con } u_\varphi \text{ come in (3)} \end{aligned}$$

è continuo. Di conseguenza esiste una misura μ_z^D (supportata in $\partial_p D$) tale che

$$u_\varphi(z) = \int_{\partial_p D} \varphi(\zeta) d\mu_z^D(\zeta).$$

Le misure $\{\mu_z^D\}_{z \in D}$ sono chiamate misure *H-caloriche*. Poiché $a_0 \equiv 0$, risulta $\mu_z^D(\partial_p D) = 1$.

Il primo passo è mostrare l'esistenza e le proprietà di base della funzione di Green per un cilindro regolare $\mathbb{R} \times \Omega$.

Theorem

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio H-regolare. Allora esiste una funzione di Green G^Ω sul cilindro $\mathbb{R} \times \Omega$, tale che:

1. *G^Ω è definita e continua (nella coppia di variabili) per $z \neq \zeta$. Inoltre, $\forall \zeta \in \mathbb{R} \times \Omega$, $G(\cdot;\zeta) \in C^\infty((\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\})$, e*

$$H(G(\cdot;\zeta)) = 0 \ \text{ in } (\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\}, \qquad G(\cdot;\zeta) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}\times\partial\Omega.$$

Theorem

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un dominio H-regolare. Allora esiste una funzione di Green* G^Ω *sul cilindro* $\mathbb{R} \times \Omega$*, tale che:*

1. G^Ω *è definita e continua (nella coppia di variabili) per* $z \neq \zeta$*. Inoltre,* $\forall \zeta \in \mathbb{R} \times \Omega$*,* $G(\cdot;\zeta) \in C^\infty((\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\})$*, e*

$$H(G(\cdot;\zeta)) = 0 \ \textit{in} \ (\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\}, \qquad G(\cdot;\zeta) = 0 \ \textit{in} \ \mathbb{R} \times \partial\Omega.$$

2. *Si ha* $0 \leq G \leq h$*, e* $G(t,x;\tau,\xi) = 0$ *per* $t < \tau$*.*

Theorem

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio H-regolare. Allora esiste una funzione di Green G^Ω sul cilindro $\mathbb{R} \times \Omega$, tale che:

1. *G^Ω è definita e continua (nella coppia di variabili) per $z \neq \zeta$. Inoltre, $\forall \zeta \in \mathbb{R} \times \Omega$, $G(\cdot;\zeta) \in C^\infty((\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\})$, e*
$$H(G(\cdot;\zeta)) = 0 \text{ in } (\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\}, \qquad G(\cdot;\zeta) = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \partial\Omega.$$
2. *Si ha $0 \leq G \leq h$, e $G(t,x;\tau,\xi) = 0$ per $t < \tau$.*
3. *Per ogni $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ tale che $\varphi = 0$ in $\partial\Omega$ e ogni fissato $\tau \in \mathbb{R}$, la funzione*
$$u(t,x) = \int_\Omega G(t,x;\tau,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad x \in \overline{\Omega}, \ t > \tau$$
appartiene a $C^\infty((\tau,\infty) \times \Omega) \cap C([\tau,\infty) \times \overline{\Omega})$ e risolve
$$Hu = 0 \text{ in } (\tau,\infty) \times \Omega; \quad u = 0 \text{ in } [\tau,\infty) \times \partial\Omega; \quad u(\tau,\cdot) = \varphi \text{ in } \overline{\Omega}$$

Sketch della dimostrazione.

Poiché Ω è regolare, fissato un qualsiasi cilindro $D = (T_1, T_2) \times \Omega$ possiamo porre

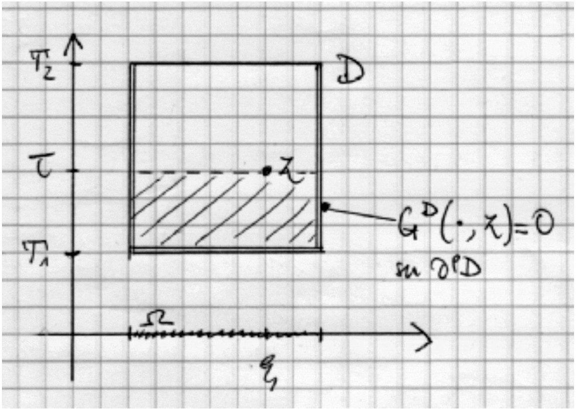
$$\Psi_{\zeta}^{D}(z) = \int_{\partial^p D} h(\eta; \zeta)\, d\mu_z^D(\eta), \qquad z, \zeta \in D,$$

in modo che $G^D(z; \zeta) = h(z; \zeta) - \Psi_{\zeta}^{D}(z)$ risolva

$$\begin{gathered} G^D(\cdot; \zeta) \in C^\infty(D \setminus \{\zeta\}) \\ H(G^D(\cdot; \zeta)) = 0 \text{ in } D \setminus \{\zeta\} \\ G^D(\cdot; \zeta) = 0 \text{ in } \partial_p D \end{gathered}$$

$\square$

Per il principio di massimo (v. figura)



si vede allora che

$$G^D(t, x; \tau, \xi) = 0 \text{ se } t \leq \tau, \qquad G^D(t, x; \tau, \xi) \geq 0 \text{ se } t \geq \tau.$$

Ora consideriamo la successione $D_n = (-n, n) \times \Omega$ e osserviamo che (ancora per il principio di massimo)

$$G^{D_n} = G^{D_{n+1}} in (D_n \cup \partial_p D_n) \times D_n.$$

Perciò è ben posta la definizione: $G(z;\zeta) = G^{D_n}(z;\zeta)$, per $z \in D_n \cup \partial_p D_n$, $\zeta \in D_n$.Inoltre, G risolve

$$H(G(\cdot;\zeta)) = 0 \text{ in } (\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{\zeta\}, G(\cdot,\zeta) = 0 \text{ in } \mathbb{R}\times\partial\Omega.$$

Definiamo anche $\Psi = \Psi^{\Omega}$ ponendo

$$\Psi(z;\zeta) = h(z;\zeta) - G(z;\zeta)$$

(cioè, $\Psi(z;\zeta) = \Psi_{\zeta}^{D}(z)$ per $\zeta \in D = (T_1, T_2) \times \Omega$, $z \in D \cup \partial_p D$).
Si tratta ora di dimostrare che Ψ è continua nella *coppia delle variabili*; questo implica la continuità di G fuori dalla diagonale di $(\mathbb{R} \times \overline{\Omega}) \times (\mathbb{R} \times \Omega)$.
(Omettiamo i dettagli; si usa ancora il principio di massimo). Questo prova (1), mentre (2) segue subito dal principio di massimo e la costruzione fatta.

Per provare (3), si scrive

$$\int_\Omega G(t,x;\tau,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \int_\Omega h(t,x;\tau,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \int_\Omega \Psi(t,x;\tau,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

e si ragiona separatamente sui due addendi. Del primo si sa già tutto, per la teoria sviluppata precedentemente su h (quell'integrale rappresenta la soluzione del problema di Cauchy); il secondo si tratta sfruttando la regolarità di Ψ: occorre provare che le derivate di Ψ fatte rispetto alla prima variabile, non solo esistono, ma sono uniformemente limitate rispetto alla seconda variabile. Questo fatto si basa sulle *stime di Schauder* per l'operatore H ed altri risultati di regolarità.

Una consguenza della formula di rappresentazione mediante la funzione di Green è anche la proprietà di riproduzione, analoga a quella che vale per la soluzione fondamentale:

Corollary (Proprietà di riproduzione per G)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio H-regolare, e sia G^Ω la funzione di Green costruita come nel teorema precedente. Allora

$$G^\Omega(t,x;\tau,\xi) = \int_\Omega G^\Omega(t,x;s,y)\, G^\Omega(s,y;\tau,\xi)dy,$$

per ogni $t > s > \tau$ e x, $\xi \in \Omega$.

Ora particolarizziamo il discorso allo studio della funzione di Green di cilindri aventi per base domini regolari che approssimano le sfere metriche. Sarà per questi domini che proveremo le stime Gaussiane su G.

Lemma (di approssimazione con domini regolari, v. [2])

Per ogni $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ e $\delta \in (0,1)$, esiste un dominio $A = A(\xi_0, R)$, H-regolare tale che

$$B(\xi_0, \delta R) \subseteq A \subseteq B(\xi_0, R).$$

Fissiamo $\delta_0 \in (0,1), \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$.
La funzione di Green per H su $\mathbb{R} \times A(\xi_0, R)$ si deve pensare come il sostituto naturale della funzione di Green sul cilindro $\mathbb{R} \times B(\xi_0, R)$. Per questa funzione di Green vale il prossimo Teorema:

Theorem

Sia $R_0 > 0$, $T > 1$ *e* $\gamma \in (0, \delta_0)$. *Allora:*

$$G^{A(\xi_0,R)}(t,x;\tau,\xi) \geq \mathbf{c}\,|B(\xi,\sqrt{t-\tau})|^{-1} \exp\left(-\mathbf{c}\frac{d^2(x,\xi)}{t-\tau}\right),$$

per ogni $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in (0, R_0]$, $x, \xi \in B(\xi_0, \gamma R)$, *and* $0 < t - \tau < T R^2$.

Per provare il teorema, si comincia a dimostrare una stima simile, sotto un'ipotesi restrittiva sulla posizione dei punti (t, x), (τ, ξ):

Lemma

Sia $R_0 > 0$ *e* $\delta \in (0, \delta_0)$. $\exists \rho \in (0, 1)$, *tale che*

$$G^{A(\xi_0,R)}(t,x;\tau,\xi) \geq \mathbf{c}\,|B(\xi,\sqrt{t-\tau})|^{-1} \exp\left(-\mathbf{c}\frac{d^2(x,\xi)}{t-\tau}\right),$$

$\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in (0, R_0]$, $x \in A(\xi_0, R)$, $\xi \in B(\xi_0, \delta R)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$ *tali che* $d^2(x, \xi) < t - \tau < \rho R^2$.

Dimostrazione del Lemma.

Sia

$$D = (\tau - 1, t + 1) \times A(\xi_0, R).$$

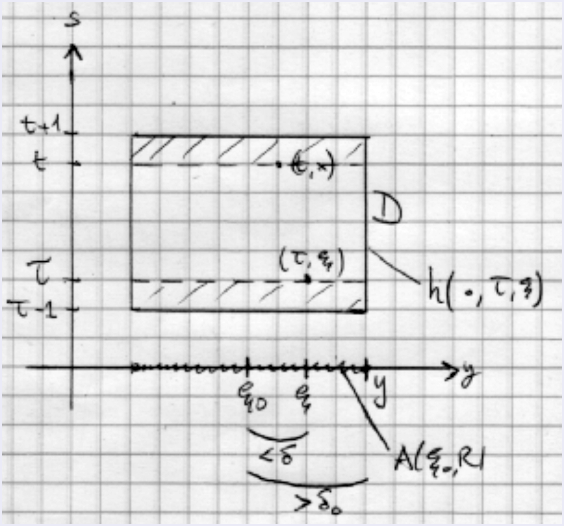
Per questo dominio D, scriviamo la formula di rappresentazione (valida perché $(t, x), (\tau, \xi) \in D$)

$$\Psi^{A(\xi_0,R)}(t, x; \tau, \xi) = \Psi^{D}_{(\tau,\xi)}(t, x) = \int_{\partial_p D} h(s, y; \tau, \xi)\, d\mu^{D}_{(t,x)}(s, y).$$

$\square$

(segue dim.)

Osservando (v. figura) la posizione dei punti,



(segue dim.)

$$\begin{aligned}\Psi^{D}_{(\tau,\xi)}(t,x) &= \int_{\partial_p D} h(s,y;\tau,\xi)\, d\mu^{D}_{(t,x)}(s,y) \\ &\leq \mathbf{c}(R_0) \int_{[\tau,t]\times\partial A(\xi_0,R)} \mathbf{E}(\xi,y,\mathbf{c}(s-\tau))\, d\mu^{D}_{(t,x)}(s,y) \\ &\leq \mathbf{c}(R_0) \sup_{0<r<t-\tau} \left|B(\xi,\sqrt{r})\right|^{-1} \exp\left(-\frac{(\delta_0-\delta)^2 R^2}{\mathbf{c}\, r}\right)\end{aligned}$$

dove nell'ultima ho maggiorato l'integranda usando il fatto che $d(y,\xi) \geq (\delta_0-\delta)R$ e $(s-\tau) < (t-\tau)$. Inoltre, ricordo che $\mu^{D}_{(t,x)}(\partial_p D) \equiv 1$. □

(segue dim.)

Ora scriviamo

$$G^{A(\xi_0,R)}(t,x;\tau,\xi) = h(t,x;\tau,\xi) - \Psi^{A(\xi_0,R)}(t,x;\tau,\xi)$$

e usiamo anche la stima dal basso su h, per ottenere, poiché $\frac{d^2(x,\xi)}{t-\tau} < 1$:

$$\geq \mathbf{c}\,|B(\xi,\sqrt{t-\tau})|^{-1} \exp\left(-\mathbf{c}\,\frac{d^2(x,\xi)}{t-\tau}\right) \times$$
$$\times \left[1 - \mathbf{c} \sup_{0<r<t-\tau} \frac{|B(\xi, R\sqrt{\rho})|}{|B(\xi,\sqrt{r})|} \exp\left(\mathbf{c}\frac{d^2(x,\xi)}{t-\tau} - \frac{R^2}{\mathbf{c}(\delta,\delta_0)\,r}\right)\right]$$

per ρ abbastanza piccolo (ricordando che $r < (t-\tau) < \rho R^2$).

$$\geq \mathbf{c}\,\mathbf{E}(x,\xi,\mathbf{c}^{-1}(t-\tau)) \left[1 - \mathbf{c} \sup_{0<r<t-\tau} \left(\frac{\rho\,R^2}{r}\right)^{Q/2} \exp\left(-\frac{R^2}{\mathbf{c}r}\right)\right]$$
$$\geq \mathbf{c}\mathbf{E}(x,\xi,\mathbf{c}^{-1}(t-\tau))$$

Dimostrazione del Teorema.

(I dettagli tecnici di questa dimostrazione sono faticosi, ne diamo solo un'idea imprecisa). Nel Lemma precedente, si è dimostrata la stima Gaussiana dal basso sotto le ipotesi del Teorema, più la restrizione aggiuntiva $d^2(x,\xi) < t - \tau < \rho R^2$.

Per rimuovere questa restrizione, l'idea è: costruire una catena di punti di $\mathbb{R}^n$

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_{k+1} = \xi$$

(su un'opportuna curva subunitaria che congiunge x_0 e ξ) tali che le distanze $d(x_j, x_{j+1})$ e $d(x_j, \xi_0)$ siano "abbastanza piccole"; definire analogamente i punti

$$t = t_0, t_1, \ldots, t_{k+1} = \tau \text{ tali che } t_j - t_{j+1} = \frac{t-\tau}{k+1} \text{ per } j = 0, \ldots, k,$$

e poi usare ripetutamente la formula di riproduzione per la funzione di Green $G = G^{A(\xi_0,R)}$, al modo seguente: $\square$

(Segue dim.)

$$G(t,x;\tau,\xi) =$$

$$\int_{(A(\xi_0,R))^k} G(t,x;y_1,t_1)\, G(y_1,t_1;y_2,t_2)\cdots G(y_k,t_k;\tau,\xi)\, dy_1\cdots dy_k$$

$$\geq \int_{B(x_1,\sigma)} G(t,x;y_1,t_1) G(y_1,t_1;y_2,t_2) dy_1 \int_{B(x_2,\sigma)} \cdot \int_{B(x_k,\sigma)} G(y_k,t_k;\tau,\xi) dy$$

dove $y_0 = x$, $y_{k+1} = \xi$, e $\sigma = \frac{1}{4}\sqrt{(t-\tau)/(k+1)}$.
Ora, si mostra che è possibile scegliere k e i punti x_i in modo che ad ogni fattore $G(y_j,t_j;y_{j+1},t_{j+1})$ $(j = 0,1,...,k)$ sia applicabile, quando $y_j \in B(x_j,\sigma)$, la stima Gaussiana dal basso:

$$G(t,x;\tau,\xi) \geq \mathbf{c}(R_0)^{-(k+1)} \int_{\prod_{j=1}^k B(x_j,\sigma)} \prod_{j=0}^k \frac{\exp\left(-\frac{d(y_j,y_{j+1})^2}{\mathbf{c}(t_j-t_{j+1})}\right)}{|B(y_j,\mathbf{c}(t_j-t_{j+1}))|} dy_1\cdots dy_k$$

poiché $d(y_j,y_{j+1})^2 / (t_j - t_{j+1}) < 1$ $\square$

(segue dim.)

$$
\begin{aligned}
&\geq \mathbf{c}(R_0)^{-1} \exp(-\mathbf{c}(R_0)\, k) \frac{1}{|B(x,\mathbf{c}\sigma)|} \prod_{j=1}^{k} \frac{|B(x_j,\sigma)|}{|B(x_j,\mathbf{c}\sigma)|} \\
&\geq \mathbf{c}(R_0)^{-1} |B(x,\mathbf{c}\sigma)|^{-1} \exp(-\mathbf{c}(R_0)\, k) \\
&\geq \mathbf{c}(R_0)^{-1} |B(x,\sqrt{t-\tau})|^{-1} \exp(-\mathbf{c}(R_0)\, k),
\end{aligned}
$$

per come è definito σ. E questo, di nuovo per com'è stato definito k, implica

$$
G(t,x;\tau,\xi) \geq \mathbf{c}(R_0)^{-1} |B(x,\sqrt{t-\tau})|^{-1} \exp\left(-\mathbf{c}\,\frac{d^2(x,\xi)}{t-\tau}\right).
$$

$\square$

Disuguaglianza di Harnack per operatori a coefficienti regolari

Mostriamo come dalla stima Gaussiana dal basso per la funzione di Green di un "cilindro approssimato", seguono due Lemmi, che congiuntamente implicano la disuguaglianza di Harnack (nell'ipotesi qualitativa di coefficienti regolari).

Lemma (Riduzione dell'oscillazione delle soluzioni)

Siano $R_0 > 0$ e $\gamma \in (0, \delta_0)$. Esiste una costante $\mu \in (0,1)$, tale che per ogni $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $R \in (0, R_0]$ e ogni

$$u \in C^\infty((\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)) \cap C([\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)})$$

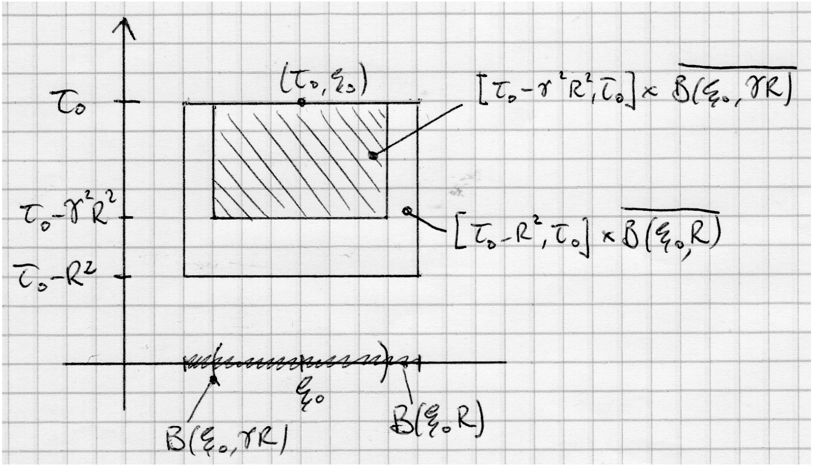
soddisfacente

$$Hu = 0 \text{ in } (\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)$$

si ha

$$\operatorname*{osc}_{[\tau_0 - \gamma^2 R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, \gamma R)}} u \leq \mu \operatorname*{osc}_{[\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)}} u.$$

Il Lemma dice che riducendo il cilindro di un fattore fissato, l'oscillazione della soluzione u sul cilindro (qui non si chiede che u sia positiva) si riduce di un fattore fissato:



Proof.

Sia

$$D = (\tau_0 - R^2, \tau_0) \times A(\xi_0, R).$$

Se u è come nell'enunciato, allora $Hu = 0$ in D. Sia

$$M = \max_{\overline{D}} u, \;\; m = \min_{\overline{D}} u.$$

Se poniamo $w = u - m$, anche $Hw = 0$ in D perché H non ha il termine di ordine zero. Definiamo, in D, la funzione

$$v(t, x) = \int_{A(\xi_0, R)} G^{A(\xi_0, R)}(t, x; \tau_0 - R^2, y)\, w(\tau_0 - R^2, y)\, \varphi(y) d y,$$

dove φ è una funzione cutoff

$$B(\xi_0, \gamma R) \prec \varphi \prec A(\xi_0, R).$$

$\square$

(segue dim.)

Per le proprietà viste della funzione di Green,

$$\begin{cases} Hv = 0 & \text{in } D, \\ v = 0 & \text{su } \partial_{lat} D, \\ v(\tau_0 - R^2, \cdot) = w(\tau_0 - R^2, \cdot)\, \varphi & \text{in } A(\xi_0, R). \end{cases}$$

Allora per il principio di massimo,

$$v \leq w \text{ in } D$$

e per ogni $(t, x) \in D_\gamma = (\tau_0 - \gamma^2 R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, \gamma R)$ possiamo scrivere

$$w\,(t,x) \geq v\,(t,x) \geq \int_S G^{A(\xi_0,R)}(t, x; \tau_0 - R^2, y)\, \left(\tfrac{M+m}{2} - m\right) dy$$

dove

$$S = \left\{ x \in B(\xi_0, \gamma R) \,|\, u(x, \tau_0 - R^2) \geq (M+m)/2 \right\}.$$

$\square$

(segue dim.)

Sfruttando ora la stima Gaussiana dal basso dimostrata per G abbiamo

$$w(t,x) \geq \int_S \frac{\mathbf{c}}{\left|B\left(x, \sqrt{t-\tau_0+R^2}\right)\right|} e^{-d(x,y)^2/\mathbf{c}\left(t-\tau_0+R^2\right)} \frac{M-m}{2} dy$$
$$\geq \mathbf{c}|B(x,R)|^{-1} \frac{M-m}{2} |S|$$
$$\geq \mathbf{c}|B(\xi_0,R)|^{-1} \frac{M-m}{2} |S|.$$

perché $t > \tau_0 - \gamma^2 R^2$, quindi $t - \tau_0 + R^2 \geq \left(1-\gamma^2\right) R^2$; qui si usa in modo cruciale il "ritardo" introdotto restringendo il cilindro nel tempo. L'ultima disuguaglianza invece segue dalla condizione $x \in B(\xi_0, \gamma R)$, che rende $|B(x,R)|$ e $|B(\xi_0,R)|$ equivalenti, per la doubling. □

(segue dim.)

Ora, se $|S| \geq \frac{1}{2}|B(\xi_0, \gamma R)|$, otteniamo

$$\min_{\overline{D}_\gamma} w = \min_{\overline{D}_\gamma} u - m \geq \mathbf{c}(M - m)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}_{\overline{D}_\gamma} u &\leq M - \min_{\overline{D}_\gamma} u \leq M - m - \mathbf{c}(M - m) \\ &= (1 - \mathbf{c}) \operatorname*{osc}_{\overline{D}} u \leq (1 - \mathbf{c}) \operatorname*{osc}_{[\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)}} u \end{aligned}$$

perché $A(\xi_0, R) \subseteq B(\xi_0, R)$. Se invece $|S| < \frac{1}{2}|B(\xi_0, \gamma R)|$, basta applicare il ragionamento precedente a $\widetilde{u} := -u$, per cui si ha $\left|\widetilde{S}\right| > \frac{1}{2}|B(\xi_0, \gamma R)|$ e $\operatorname{osc} \widetilde{u} = \operatorname{osc} u$. □

Lemma (Stima da sopra della media di una soluzione positiva)

Sia $R_0 > 0$, $h \in (0,1)$ *e* $\gamma \in (0,\delta_0)$. $\exists \beta > 0$ *tale che per ogni* $(\xi_0,\tau_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $R \in (0,R_0]$ *e ogni*

$$u \in C^\infty(B(\xi_0,R)\times(\tau_0-R^2,\tau_0)) \cap C(\overline{B(\xi_0,R)}\times[\tau_0-R^2,\tau_0])$$

che soddisfa

$$Hu = 0,\, u \geq 0 \text{ in } B(\xi_0,R)\times(\tau_0-R^2,\tau_0)$$

si ha:

$$\begin{aligned}\sup_{\sigma>0,\, s\in[\tau_0-R^2,\tau_0-hR^2]} & \sigma\,|\{y \in B(\xi_0,\gamma R) \mid u(s,y) \geq \sigma\}| \leq \\ \leq & \ \beta |B(\xi_0,R)| u(\tau_0,\xi_0)\end{aligned}$$

La disuguaglianza appena scritta (che è quella che si userà nel seguito) sarà dimostrata come conseguenza della prossima, più trasparente:

$$\frac{1}{|B(\xi_0, R)|}\int_{B(\xi_0,\gamma R)} u(s,y)\,dy \leq \mathbf{c}u(\tau_0,\xi_0) \quad \forall s \in [\tau_0 - R^2, \tau_0 - hR^2].$$

In particolare, notiamo che $u(\tau_0,\xi_0) = 0$ implica $u \equiv 0$ in $[\tau_0 - R^2, \tau_0 - hR^2] \times B(\xi_0,\gamma R)$.

Dimostrazione.

(Simile alla precedente). Fissiamo $s \in [\tau_0 - R^2, \tau_0 - hR^2]$, sia $D = (s, \infty) \times A(\xi_0, R)$ e definiamo in D la funzione

$$w(t, x) = \int_{A(\xi_0, R)} G^{A(\xi_0, R)}(t, x; s, y)\, u(s, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

dove φ è una funzione cut-off con $B(\xi_0, \gamma R) \prec \varphi \prec A(\xi_0, R)$. Allora:

$$\begin{cases} Hw = 0 & \text{in } D, \\ w = 0 & \text{su } \partial_{lat} D, \\ w(s, \cdot) = u(s, \cdot)\, \varphi & \text{in } A(\xi_0, R). \end{cases}$$

e, per il principio di massimo, poiché $u \geq 0$ in $A(\xi_0, R) \times (\tau_0 - R^2, \tau_0)$, si ha

$$w \leq u \text{ in } [s, \tau_0] \times \overline{A(\xi_0, R)}.$$

□

(segue dim.)

Usando la stima Gaussiana dal basso su $G^{A(\xi_0,R)}$, otteniamo

$$u(\tau_0,\xi_0) \geq w(\tau_0,\xi_0) \geq \int_{A(\xi_0,R)} \frac{\mathbf{c}u(s,y)\,\varphi(y)}{\left|B(\xi_0,\sqrt{\tau_0 - s})\right|} e^{-d(\xi_0,y)^2/\mathbf{c}(\tau_0-s)} dy$$

poiché $\tau_0 - s \geq hR^2$ (qui si usa in maniera cruciale il "ritardo temporale" tra s e τ_0) e $d(\xi_0, y) \leq \mathbf{c}R$, quindi $\frac{d(\xi_0,y)^2}{(\tau_0-s)} \leq \mathbf{c}$ (indipendente da R)

$$\geq \frac{\mathbf{c}}{|B(\xi_0,R)|} \int_{B(\xi_0,\gamma R)} u(s,y)\,dy$$
$$\geq \frac{\mathbf{c}}{|B(\xi_0,R)|} \sigma \left|\{y \in B(\xi_0,\gamma R) \mid u(s,y) \geq \sigma\}\right|$$

per ogni σ. $\square$

Dai due Lemmi precedenti segue la disuguaglianza di Harnack, esattamente come in Fabes-Stroock.

Theorem

Sia $R_0 > 0$, $0 < h_1 < h_2 < 1$ *e* $\gamma \in (0,1)$. $\exists M > 0$ *tale che per ogni* $(\xi_0, \tau_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $R \in (0, R_0]$ *e ogni*

$$u \in C^\infty((\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)) \cap C([\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)})$$

che soddisfa

$$Hu = 0, u \geq 0 \text{ in } (\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)$$

si ha

$$\max_{[\tau_0 - h_2 R^2, \tau_0 - h_1 R^2] \times \overline{B(\xi_0, \gamma R)}} u \leq M\, u(\xi_0, \tau_0).$$

Dimostrazione del Teorema.

(Anche questa dimostrazione è molto tecnica, ne diamo solo un'idea). Fissati i parametri h_1, h_2, γ del Teorema, si sceglie il numero δ_0 che compare nei due Lemmi (che dice quanto bene approssimiamo la sfera $B(\xi_0, R)$ con un dominio regolare) ; in funzione delle costanti dei due Lemmi, si definiscono (con valori *ad hoc*) due costanti $K, M > 1$, e si dimostra, per assurdo, che vale la tesi proprio con questa costante M (il ruolo di K si spega fra un momento).
Si osserva anzitutto che $u(\tau_0, \xi_0) \neq 0$, altrimenti si avrebbe $u \equiv 0$ in $B(\xi_0, \gamma R)$ (come osservato dopo il primo Lemma) e la disuguaglianza di Harnack sarebbe banalmente vera. Introduciamo la soluzione normalizzata

$$v = \frac{u}{u(\tau_0, \xi_0)}.$$

Poiché per ipotesi u (e quindi v) è continua e quindi limitata in $[\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)}$, l'assurdo sarà raggiunto se proveremo che v è illimitata. $\square$

(segue dim.)

Per far questo, si costruisce induttivamente una successione di punti

$$(s_j, y_j) \in [\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)}$$

tali che

$$v(s_j, y_j) \geq K^j M.$$

Per l'ipotesi assurda esiste un punto
$(s_0, v_0) \in \left[\tau_0 - h_2 R^2, \tau_0 - h_1 R^2\right] \times \overline{B(\xi_0, \gamma R)}$ in cui $v(s_0, y_0) \geq M$.
Si suppone ora di avere un punto (s_j, y_j) in cui $v\left(s_j, y_j\right) \geq K^j M$, e si mostra come costruirne un altro (s_{j+1}, y_{j+1}) tale che $v\left(s_{j+1}, y_{j+1}\right) \geq K^{j+1} M$. Di questo argomento, laborioso, diamo solo un cenno per indicare come si utilizzano i due Lemmi.
La disuguaglianza

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma>0,\, s\in[\tau_0-R^2,\tau_0-hR^2]} & \sigma\left|\{y \in B(\xi_0, \gamma R) \mid u(s, y) \geq \sigma\}\right| \leq \\ & \leq \beta\left|B(\xi_0, R)\right| u(\tau_0, \xi_0) \end{aligned}$$

(segue dim.)

viene usata nella forma

$$\left|\left\{y \in B(\xi_0, \gamma' R) \,|\, v(s,y) \geq \sigma\right\}\right| \leq \frac{\beta}{\sigma} \left|B(\xi_0, R)\right|$$

con una scelta *ad hoc* di σ, per ottenere

$$\frac{\beta}{\sigma} \left|B(\xi_0, R)\right| < \left|B(\xi_0, \gamma' R)\right|$$

e poter quindi concludere che esiste un punto di $B(\xi_0, \gamma' R)$ in cui $v(s,y) < \sigma$. Sfruttando allora l'ipotesi induttiva $v(s_j, y_j) \geq K^j M$, si ottiene che l'*oscillazione* di v su una certa palletta è maggiore di una data soglia. Allora, per il Lemma sull'oscillazione, si ottiene una stima dal basso per l'oscillazione su una palletta un po' più piccola, che consente di iterare il discorso, e ottenere un punto (s_{j+1}, y_{j+1}) in cui v è maggiore di $K^{j+1} M$. Questo è il tipo di argomento con cui si prova Harnack, nel caso regolare. $\square$

Disuguaglianza di Harnack nel caso non regolare

Supponiamo ora che i coefficienti a_{ij}, a_k di H siano *solo Hölderiani*, e approssimiamo H con operatori a coefficienti regolari:

$$H_\varepsilon = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^{\varepsilon}(t,x)\, X_i X_j - \sum_{k=1}^{m} a_k^{\varepsilon}(t,x)\, X_k,$$

dove $a_{i,j}^{\varepsilon}$ e a_k^{ε} sono versioni regolarizzate di a_{ij} e a_k come nel Teorema sui mollificatori.

Ricordiamo ancora il risultato di approssimazione delle sfere con domini regolari, in una forma più precisa che ora è cruciale:

Lemma (Lanconelli-Uguzzoni [2])

$\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0$ e $\delta \in (0,1)$, esiste un dominio A, H_ε-regolare per ogni $\varepsilon > 0$, tale che

$$B(\xi_0, \delta R) \subseteq A \subseteq B(\xi_0, R)$$

e con la seguente proprietà: per ogni cilindro limitato $D = (T_1, T_2) \times A$ e per ogni $\varphi \in C(\partial_p D)$, se u_ε è la soluzione di

$$\begin{cases} H_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \text{ in } D \\ u_\varepsilon = \varphi \text{ in } \partial_p D \end{cases}$$

si ha

$$|u_\varepsilon(z) - \varphi(z_0)| \to 0, \text{ per } z \to z_0, \text{ uniformemente in } 0 < \varepsilon < 1, \tag{4}$$

per ogni $z_0 \in \partial_p D$.

Grazie a questo risultato, non è ora difficile concludere la dimostrazione della disuguaglianza di Harnack invariante, che riscriviamo:

Theorem (Disuguaglianza di Harnack parabolica)

Supponiamo che H *soddisfi tutte le ipotesi sopra elencate; inoltre, sia* $a_0 \equiv 0$. *Esiste una costante* $R_0 > 0$ *tale che, per ogni* $0 < h_1 < h_2 < 1$ *e* $\gamma \in (0,1)$, *esiste* $M > 0$, *dipendente solo da* $h_1, h_2, \gamma, \lambda$, *i campi vettoriali* X_i *e la norma di Hölder dei coefficienti, tale che per ogni* (τ_0, ξ_0), $R \in (0, R_0]$ *e ogni*

$$u \in \mathfrak{C}^2((\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)) \cap C([\tau_0 - R^2, \tau_0] \times \overline{B(\xi_0, R)})$$

soddisfacente

$$Hu = 0, u \geq 0 \text{ in } (\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R),$$

si ha

$$\max_{[\tau_0 - h_2 R^2, \tau_0 - h_1 R^2] \times \overline{B(\xi_0, \gamma R)}} u \leq M\, u(\tau_0, \xi_0).$$

Proof.

Sia u soluzione positiva di $Hu = 0$ in $(\tau_0 - R^2, \tau_0) \times B(\xi_0, R)$. Sia A come nel *Lemma di approssimazione uniforme*, per un certo δ scelto opportunamente in funzione dei nostri parametri; sia $D = (\tau_0 - R^2, \tau_0) \times A$, e sia u_ε la soluzione del problema

$$\begin{cases} H_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \text{ in } D \\ u_\varepsilon = u \text{ in } \partial_p D \end{cases}$$

Si mostra ora che u_ε converge localmente uniformemente a u; la disuguaglianza di Harnack (che vale per u_ε) si trasferirà allora ad u. Applicando a u_ε le *stime di Schauder* per H_ε, sfruttando il fatto che per il *teorema sui mollificatori* la costante nella stima è indipendente da ε (perché dipende dalle norme di Hölder dei coefficienti di H_ε e dalla costante di ellitticità di a_{ij}^ε, che sono controllate da quelle di H) e usando il *principio di massimo* si ha che per ogni dominio limitato $O \Subset D$,

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(O)} \leq \mathbf{c}(O, D) \sup_D |u_\varepsilon| \leq \mathbf{c}(O, D) \max_{\partial_p D} |u| .$$

(segue dim.)

Per il *teorema di compattezza* in spazi di Hölder che abbiamo visto, esiste $v \in C^{2,\alpha}_{loc}(D)$ che soddisfa $Hv = 0$ in D e tale che per qualche $\varepsilon_k \to 0$, $u_{\varepsilon_k} \to v$ uniformemente sui compatti contenuti in D. Mostriamo che $v|_{\partial_p D} = u$. Per far questo scriviamo, per $z_0 \in \partial D$,

$$|v(z) - u(z_0)| \leq |v(z) - u_{\varepsilon_k}(z)| + |u_{\varepsilon_k}(z) - u(z_0)|$$

e applichiamo il *Lemma di approssimazione uniforme*:

$$|u_{\varepsilon_k}(z) - u(z_0)| < \eta \text{ purché } d(z, z_0) < \rho \text{ (uniformemente in } \varepsilon_k)$$

mentre, per ciascuno di questi punti z si ha

$$|v(z) - u_{\varepsilon_k}(z)| < \eta$$

per ε_k abbastanza piccolo (eventualmente dipendente da z). Quindi $v|_{\partial_p D} = u$, e per il principio di massimo per H concludiamo $v = u$ in D. □

(segue dim.)

In particolare, questo significa che u_{ε_k} *converge uniformemente a u nei sottoinsiemi compatti di D*.

Ora applichiamo la disuguaglianza di Harnack (per operatori a coefficienti regolari) a u_{ε_k} (notando che $u_\varepsilon \geq 0$ poiché $\varphi \geq 0$), con costante che, di nuovo, dipende da H_ε solo mediante quei parametri che sono controllati dagli analoghi parametri di H, e quindi non dipende da ε.

Perciò si può passare al limite per $\varepsilon \to 0$, e si ottiene la disuguaglianza di Harnack per u (a parte qualche complicazione tecnica -su cui non entriamo- relativa alla scelta del cilindretto su cui applicare Harnack per u_ε). $\square$

La disuguaglianza di Harnack parabolica implica immediatamente l'analoga versione stazionaria:

Theorem (Disuguaglianza di Harnack per operatori stazionari)

Sia L come sopra, e sia $R_0 > 0$. Esiste una costante positiva $M = \mathbf{c}(R_0)$ tale che per ogni $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in (0, R_0]$ e ogni $u \in \mathfrak{C}^2(B(\xi_0, 3R))$ soddisfacente

$$Lu = 0, \;\; u \geq 0, \;\; in \; B(\xi_0, 3R)$$

si ha

$$\max_{B(\xi_0,R)} u \leq M \min_{B(\xi_0,R)} u.$$

Si tratterebbe ora di mostrare come questi risultati si applichino a operatori definiti solo localmente, grazie ai risultati di estensione che abbiamo visto. Non entriamo in questi dettagli.

Bibliografia

- D. G. Aronson: Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. Bull. Amer. Math. Soc. 73 1967 890-896.
- E. Bedford, B. Gaveau: Hypersurfaces with bounded Levi form. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), no. 5, 867–873.
- A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups, Adv. Differential Equations, 7 (2002), 1153-1192.
- A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 7, 2709-2737
- A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni: Families of diffeomorphic sub-Laplacians and free Carnot groups. Forum Math. 16 (2004), no. 3, 403-415.
- A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni: Harnack inequality for non-divergence form operators on stratified groups, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

- A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni: Maximum principle and propagation for intrinsicly regular solutions of differential inequalities structured on vector fields, J. Math. Anal. Appl., vol. 322, n. 2 (2006), 886-900.
- J.-M. Bony: Principe du maximum, inégalite de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19 1969 fasc. 1, 277-304 xii.
- M. Bramanti, L. Brandolini: L^p-estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups. Rend. Sem. Mat. dell'Univ. e del Politec. di Torino. Vol. 58, 4 (2000), 389-433.
- M. Bramanti, L. Brandolini: L^p-estimates for nonvariational hypoelliptic operators with VMO coefficients. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 2, 781-822.
- M. Bramanti, L. Brandolini: Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic PDEs, Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005), no. 2, 511–556.

- M. Bramanti, L. Brandolini: Schauder estimates for parabolic nondivergence operators of Hörmander type. To appear on Journal of Differential Equations.
- M. Bramanti, L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Heat kernels for non-divergence operators of Hörmander type. C. R. Math. Acad. Sci. Paris., ser. I, vol. 343 (2006), 463-466.
- M. Bramanti, L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Non-divergence equations structured on Hörmander vector fields: heat kernels and Harnack inequalities. (Preprint 2006). Submitted.
- L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck: The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian. Acta Math. 155 (1985), no. 3-4, 261–301.
- L. Capogna, Q. Han: Pointwise Schauder estimates for second order linear equations in Carnot groups. Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), 45-69, Contemp. Math., 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

- Citti, G.; Sarti, A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space. J. Math. Imaging Vision 24 (2006), no. 3, 307–326.
- R. Coifman, G. Weiss: Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes. Lecture Notes in Mathematics, n. 242. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1–67.
- F. Da Lio, A. Montanari: Existence and uniqueness of Lipschitz continuous graphs with prescribed Levi curvature. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 23 (2006), no. 1, 1–28.
- D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu: On the best possible character of the norm in some a priori estimates for non-divergence form equations in Carnot groups. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 11, 3487-3498.

E. De Giorgi: Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 20 (1956), 438–441.

De Giorgi, Ennio Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. (Italian) Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 1957 25–43.

G. Di Fazio, A. Domokos, M.S. Fanciullo, J. Manfredi: Subelliptic Cordes estimates for Hörmander vector fields and applications to p-sublaplacian. Manuscripta Mathematica, vol. 120, no. 4 (2006), 419-433.

A. Domokos, J. Manfredi: Cordes conditions and subelliptic estimates. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 4, 1047-1056.

E. B. Fabes, D. W. Stroock, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash, Arch. Rational Mech. Anal. **96** (1986), 327–338.

C. Fefferman, D.H. Phong: Subelliptic eigenvalue problems. Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), 590-606, Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

C. Fefferman, A. Sánchez-Calle: Fundamental solutions for second order subelliptic operators. Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 2, 247-272.

G. B. Folland: Real Analysis. John Wiley & sons, 1999.

G. B. Folland: Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, Arkiv for Mat. 13, (1975), 161-207.

A. Friedman: Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964.

- L. Hörmander: Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119 (1967) 147–171.
- G. Huisken, W. Klingenberg: Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form. Math. Res. Lett. 6 (1999), no. 5-6, 645–661.
- D. S. Jerison, A. Sánchez-Calle: Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields. Indiana Univ. Math. J. 35 (1986), no. 4, 835-854.
- J.J. Kohn: Pseudo-differential operators and hypoellipticity. Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), pp. 61-69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.
- N. V. Krylov, M. V. Safonov: An estimate for the probability of a diffusion process hitting a set of positive measure. Dokl. Akad. Nauk SSSR 245 (1979), no. 1, 18–20.

- N. V. Krylov, M. V. Safonov: A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 44 (1980), no. 1, 161–175, 239.
- S. Kusuoka, D. Stroock: Applications of the Malliavin calculus. II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 32 (1985), no. 1, 1–76.
- S. Kusuoka, D. Stroock: Applications of the Malliavin calculus. III. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 34 (1987), no. 2, 391-442.
- S. Kusuoka, D. Stroock: Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 1, 165-189.
- E. Lanconelli, A. Pascucci: On the fundamental solution for hypoelliptic second order partial differential equations with non-negative characteristic form, Ricerche Mat. 48 (1999), no. 1, 81–106.

E. Lanconelli, S. Polidoro: On a class of hypoelliptic evolution operators. Partial differential equations, II (Turin, 1993). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 52 (1994), no. 1, 29–63.

E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Potential theory for a class of diffusion equations: a Gaussian bounds approach. In preparation.

E. E. Levi: Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Rend. Circ. Mat. Palermo 24, 275-317 (1907) (Also with corrections in: Eugenio Elia Levi, Opere, vol. II, 28-84. Roma, Edizioni Cremonese 1960).

E. E. Levi: I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Memorie Mat. Fis. Soc. Ital. Scienza (detta dei XL) (3) 16, 3-113 (1909). (Also with corrections in: Eugenio Elia Levi, Opere, vol. II, 207-343. Roma, Edizioni Cremonese 1960).

A. Montanari: Real hypersurfaces evolving by Levi curvature: smooth regularity of solutions to the parabolic Levi equation. Comm. Partial Differential Equations 26 (2001), no. 9-10, 1633–1664.

- A. Montanari, E. Lanconelli: Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators: strong comparison theorems. J. Differential Equations 202 (2004), no. 2, 306–331.
- A. Montanari, F. Lascialfari: The Levi Monge-Ampère equation: smooth regularity of strictly Levi convex solutions. J. Geom. Anal. 14 (2004), no. 2, 331–353.
- J. Moser: A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 13 1960 457–468.
- J. Moser: On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 14 1961 577–591.
- J. Moser: A Harnack inequality for parabolic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 17 1964 101–134.

- A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger: Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties. Acta Mathematica, 155 (1985), 130-147.
- J. Nash: Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 80 (1958) 931–954.
- A. Pascucci, S. Polidoro: On the Harnack inequality for a class of hypoelliptic evolution equations. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 11, 4383–4394.
- S. Polidoro: On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type. Le Matematiche (Catania) 49 (1994), no. 1, 53–105.
- L. P. Rothschild, E. M. Stein: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math., 137 (1976), 247-320.

- M. V. Safonov: Harnack's inequality for elliptic equations and Hölder property of their solutions. Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions, 12. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 96 (1980), 272–287, 312.
- L. Saloff-Coste, Aspects of Sobolev-type inequalities. London Mathematical Society Lecture Note Series, 289. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- L. Saloff-Coste, D. W. Stroock: Opérateurs uniformément sous-elliptiques sur les groupes de Lie. J. Funct. Anal. 98 (1991), no. 1, 97–121.
- A. Sanchez-Calle: Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields. Inv. Math., 78 (1984), 143-160.
- Z. Slodkowski, G. Tomassini: Weak solutions for the Levi equation and envelope of holomorphy. J. Funct. Anal. 101 (1991), no. 2, 392–407.

- E. M. Stein: Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey, 1993.
- G. Tomassini: Geometric properties of solutions of the Levi-equation. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152 (1988), 331–344.
- N. Th. Varopoulos: Théorie du potentiel sur les groupes nilpotents. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (1985), no. 5, 143-144.
- N. Th. Varopoulos, Analysis on nilpotent groups. J. Funct. Anal. 66 (1986), no. 3, 406-431.
- N. Th.Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon: Analysis and geometry on groups. Cambridge Tracts in Mathematics, 100. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- C.J. Xu: Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no. 1, 77-96.