

# Simmetrizzazione di Schwarz di funzioni e applicazioni a problemi variazionali ed equazioni a derivate parziali

Marco Bramanti

*Settembre 2004*

**Abstract.** Si presentano anzitutto il problema isoperimetrico classico e alcuni problemi isoperimetrici della fisica matematica, che vengono visti come problemi variazionali in cui un funzionale è ottimizzato quando il suo argomento ha la massima simmetria. Per trattare questi problemi, sono utili le tecniche di simmetrizzazione di funzioni. Si introducono perciò le definizioni e le principali proprietà dei riarrangiamenti di Hardy-Littlewood e delle simmetrizzazioni di Schwarz, e si mostra come con questi strumenti si possano trattare alcuni dei problemi variazionali discussi in precedenza. Quindi si discutono alcune idee di teoria geometrica della misura su cui si basano le proprietà delle simmetrizzazioni: la nozione di perimetro secondo De Giorgi, e la formula della coarea, di Federer-Fleming-Rishel. Si passa quindi a discutere come queste stesse tecniche si possano applicare alla dimostrazione di certe stime ottimali per soluzioni di equazioni alle derivate parziali, e si conclude con una rassegna bibliografica che esemplifica altre possibili applicazioni, anche recenti, delle tecniche di simmetrizzazione.

## Sommario

1. Introduzione.....	2
1.1. Cosa sono i problemi isoperimetrici.....	3
1.2. I problemi isoperimetrici come problemi variazionali in cui il minimo di un funzionale è raggiunto in condizioni di simmetria.....	5
2. Riarrangiamenti, simmetrizzazioni e applicazioni a problemi variazionali.....	6
2.1. Definizioni.....	6
2.2. Alcune proprietà di riarrangiamenti e simmetrizzazioni.....	7
2.3. Applicazioni del teorema di Pólya-Szegő.....	9
3. Cosa c'è dietro?.....	13
3.1. Perimetro e disuguaglianza isoperimetrica.....	14
3.2. La formula di Federer-Fleming-Rishel.....	17
3.3. Dimostrazione del teorema di Pólya-Szegő.....	19
4. Simmetrizzazioni ed equazioni alle derivate parziali.....	21
4.1. Il teorema di Talenti sulle equazioni ellittiche.....	21
4.2. Altre applicazioni delle tecniche di simmetrizzazione.....	25
Figure.....	28
Bibliografia.....	37

## 1. Introduzione

Questo scritto raccoglie il testo rielaborato di due seminari tenuti dall'autore presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano nei giorni 25/5 e 1/6/2004.

Per introdurre e motivare i temi qui trattati, cominciamo con un discorso molto generale, e conseguentemente piuttosto vago, che sarà reso via via più preciso nel corso dell'esposizione.

Un'idea ricorrente in molti contesti della matematica è la seguente: se i dati di un problema hanno certe simmetrie, ci si aspetta che anche la soluzione abbia analoghe simmetrie. Se questo accade, il numero di dimensioni effettivamente coinvolte nel problema si riduce, rispetto alla sua formulazione iniziale; si può quindi sperare che il problema si riduca di complessità e, nei casi più fortunati, se ne possa determinare la soluzione in maniera esplicita. A sua volta, la conoscenza esplicita della soluzione spesso permette di calcolare in maniera effettiva e precisa certe quantità, altrimenti difficilmente valutabili. I problemi con molta simmetria rivestono quindi un particolare interesse.

Al tempo stesso, questi problemi per loro natura rappresentano casi particolari, molto "rari" nella classe dei problemi che "genericamente" incontriamo. Un'interessante possibilità, che talvolta si realizza, è però la seguente: in una certa classe di problemi, ben delimitata, quello la cui soluzione rende massimo o minimo un certo funzionale è proprio il problema con la massima simmetria. Se ciò accade, certe caratteristiche quantitative della soluzione del generico problema (soluzione che non si saprebbe calcolare esplicitamente) possono essere *stimate* in termini delle corrispondenti quantità della soluzione (esplicitamente nota) del problema simmetrico. In questi casi dunque la conoscenza precisa di ciò che accade nella situazione "ideale" di massima simmetria getta luce anche sulla situazione generica che si presenta nella realtà.

E' questa la filosofia che si trova alla base dello studio dei cosiddetti "problemi isoperimetrici" della geometria e della fisica matematica che, in senso astratto, si possono vedere come problemi variazionali in cui il valore del funzionale da ottimizzare dipende da una funzione o da un insieme, e ci si aspetta che sia ottimizzato in corrispondenza di un oggetto opportunamente simmetrico. La nostra esposizione partirà proprio dall'illustrare cosa sono i problemi isoperimetrici (§1).

Questi problemi portano naturalmente a introdurre un concetto (o più concetti) di *simmetrizzazione di un insieme o di una funzione*. Simmetrizzare un oggetto significa sostituirlo con un altro che ne conserva alcune caratteristiche quantitative, ma possiede determinate simmetrie. Se si riesce a dimostrare che questa operazione di simmetrizzazione fa necessariamente crescere (o decrescere) un certo funzionale, ne seguirà che il massimo (o minimo) del funzionale è assunto in condizioni di simmetria. Nel §2 ci concentreremo in particolare sulla nozione di simmetrizzazione di funzione secondo Schwarz, di cui illustreremo le prime proprietà. Mostriamo come questo strumento permetta di affrontare e risolvere alcuni dei problemi isoperimetrici introdotti in precedenza.

Come vedremo, i problemi isoperimetrici hanno una lunga storia. A dispetto della natura relativamente elementare di molti enunciati che riguardano questi problemi, la loro dimostrazione effettiva e rigorosa richiede notevoli sforzi, e lo sviluppo di idee matematiche profonde. Il motivo va ricercato nel fatto che questi problemi hanno a che fare con funzionali di insiemi o funzioni a priori molto poco regolari, per trattare le quali sono necessarie le idee della *teoria geometrica della misura*, sviluppatasi a partire dagli anni 1950. Nel §3 introdurremo alcuni concetti di teoria geometrica della misura su cui si basano le proprietà chiave delle simmetrizzazioni, mostrando almeno nelle linee generali come si possano ottenere dimostrazioni rigorose dei teoremi isoperimetrici della fisica matematica discussi nel §1.

Infine, nel §4, mostreremo come queste stesse tecniche siano state applicate, a partire dagli anni 1960, alle equazioni a derivate parziali, ottenendo interessanti risultati. Discuteremo in dettaglio uno solo di questi risultati, a titolo esemplificativo, e termineremo con una rassegna bibliografica che dia un'idea della ricchezza e varietà di risultati che, anche in anni molto recenti, sono stati ottenuti con queste tecniche.

L'esposizione è volutamente introduttiva, e conserva il tono colloquiale del seminario.

## 1.1. Cosa sono i problemi isoperimetrici

### Il problema isoperimetrico classico

Il problema isoperimetrico nel piano è il seguente:

Trovare, tra tutte le figure piane di assegnato perimetro, quella di area massima (è il cerchio).

L'analogo problema isoperimetrico nello spazio è:

Trovare, tra tutti i solidi di assegnata area della superficie totale, quello di volume massimo (è la sfera).

A Zenodorus (300-200 a.C. circa) sono attribuiti vari teoremi isoperimetrici, conservati da Pappo di Alessandria, ad esempio:

*Tra i poligoni di  $n$  lati con perimetro assegnato, il poligono regolare racchiude l'area massima.*

*Tra due poligoni regolari con lo stesso perimetro, quello col maggior numero di lati racchiude l'area maggiore.*

*Il cerchio racchiude un'area maggiore di qualsiasi poligono con lo stesso perimetro.*

Una variante classica del problema isoperimetrico nel piano è il problema di Didone:

Trovare la linea di assegnata lunghezza che racchiuda l'area massima, quando questa linea si può appoggiare ad una retta.

Significato: la retta rappresenta la riva del mare; Didone aveva a disposizione un filo di lunghezza assegnata, ottenuto tagliando in sottili strisce la pelle di un animale, col quale doveva racchiudere un terreno il più ampio possibile, su cui sarebbe sorta Cartagine. La soluzione è disporre il filo a forma di semicirconferenza appoggiata alla riva del mare.

Trattazioni moderne del problema isoperimetrico sono state date nel 1800-1900 da molti illustri matematici:

nel piano: Steiner (1841), Edler (1882), Hurwitz (1901), Minkowsky (1903), Lebesgue (1906), ecc. ecc.;

in dimensione maggiore di 2: Tonelli (1915), Schmidt (1939, 1948, 1949), Radò (1947), De Giorgi (1958).

Ci si può chiedere: perché tante persone per provare un teorema solo? Perché, oltre al fatto che  $n = 2$ ,  $n = 3$  e  $n$  generico sono casi sostanzialmente diversi, il problema è l'estrema vaghezza dell'enunciato: chi sono "tutte le figure di perimetro fissato"? Qual è la classe in cui si minimizza il funzionale? Quale nozione di perimetro si usa? I contributi diversi dati successivamente su quest'argomento corrispondono a diversi livelli di generalità e anche di

rigore. Ad esempio, gli enunciati sopra riportati riferiti a Zenodorus sono estremamente precisi, ma anche di portata limitata: il cerchio viene confrontato con qualsiasi *poligono*, non con qualsiasi *figura* del piano. Per un survey sul teorema isoperimetrico classico, si veda Talenti [48].

### **Problemi "isoperimetrici" della fisica matematica**

Ce ne sono di vario tipo. Tre esempi famosi sono i seguenti:

**1. Congettura di Saint Venant (1856) sulla rigidità torsionale:** *tra tutte le sbarre cilindriche (di materiale fissato) la cui sezione ha area fissata (e forma a priori ignota), quella con la massima rigidità alla torsione è quella di sezione circolare.*

**2. congettura di Rayleigh (1877) sulla frequenza fondamentale di una membrana elastica:** *tra tutte le membrane vibranti (di materiale fissato, omogenee), fissate al bordo e di area fissata, quella che ha la più bassa frequenza fondamentale di vibrazione è quella circolare. (Interpretazione musicale: tra tutti i tamburi di forma variabile e area fissata, quello che produce la nota più bassa è quello circolare).*

**3. congettura di Poincaré (1903) sulla capacità elettrostatica di un solido:** *tra tutti i corpi di volume fissato (materiale fissato, omogenei), quello con la massima capacità elettrostatica è la sfera.*

Le prime dimostrazioni di questi fatti sono dovute a Szegő 1930 e Pólya 1948 (congetture 1 e 3); Faber 1923 e Krahn 1925 (congettura 2). Per un survey su questi problemi si veda Talenti [49] e la prima parte di Trombetti [51], mentre il riferimento "storico" su questo argomento è il libro (in cui sono sistematizzate, tra l'altro, le dimostrazioni delle 3 congetture citate) di Pólya e Szegő [39], del 1951.

Qual è l'interesse di questo tipo di risultati, a parte il grande valore estetico degli enunciati? Leggiamo dalla prefazione di Pólya-Szegő [39]:

Ci sono varie quantità geometriche e fisiche interessanti e importanti (funzioni d'insieme, funzionali) che dipendono dalla forma e dalla grandezza di una curva: la lunghezza del suo perimetro; l'area racchiusa; il momento d'inerzia, rispetto al centroide, di una lamina piana limitata da quella curva; la rigidità torsionale di una sbarra elastica la cui sezione è limitata da quella curva; la frequenza principale di una membrana di cui la curva data è il bordo; la frequenza principale di una piastra di ugual forma e grandezza; la capacità elettrostatica di questa piastra; e varie altre quantità. La disuguaglianza isoperimetrica tra l'area e il perimetro fu scoperta per prima. Tuttavia esistono molte simili disuguaglianze che collegano due o più delle quantità menzionate, che sono state scoperte o rimangono da scoprire. Tutte queste disuguaglianze possono essere chiamate, per analogia, "disuguaglianze isoperimetriche". (...)

Queste disuguaglianze possono essere di un qualche valore pratico. Tra tutti i triangoli di area assegnata, il triangolo equilatero ha il minimo perimetro. Possiamo usare questo "piccolo" teorema isoperimetrico per dare una stima dal basso per il perimetro di un triangolo generico, in funzione della sua area. Poiché non è difficile calcolare il perimetro del triangolo, questa stima può essere ignorata, come una pura curiosità. Tuttavia, tra tutte le membrane triangolari con area assegnata, il triangolo equilatero è anche quello che ha la più bassa frequenza

fondamentale, e noi possiamo usare questo teorema per trovare una stima dal basso per la frequenza fondamentale di un triangolo generico in funzione della sua area. Questa stima non può essere ignorata così alla leggera. Anzitutto, è semplice ed esplicita; infatti, abbiamo una formula esplicita semplice per la frequenza fondamentale del triangolo equilatero. Secondo, la stima in questione fornisce informazioni non facilmente ottenibili altrimenti; non conosciamo alcuna formula esplicita per la frequenza fondamentale di un triangolo generico. Terzo, la stessa linea di tendenza di questo risultato merita attenzione: noi stimiamo una grandezza fisica non facilmente accessibile (la frequenza fondamentale) sulla base di dati geometrici facilmente accessibili (area, forma triangolare).

## 1.2. I problemi isoperimetrici come problemi variazionali in cui il minimo di un funzionale è raggiunto in condizioni di simmetria

I problemi isoperimetrici della fisica matematica sono formulabili come problemi variazionali in cui l'incognita è una funzione (ed indirettamente un insieme, dominio o supporto della funzione).

L'idea è: se si riesce a provare che il funzionale decresce sostituendo alla generica funzione  $u$  (nella classe delle funzioni ammissibili) una sua opportuna "simmetrizzata", abbiamo che il minimo del funzionale è raggiunto in condizioni di simmetria. Ma in situazioni di simmetria sferica, ad esempio, il problema diventa unidimensionale, e si sa risolvere esplicitamente.

Si ottiene quindi un valore esplicito del minimo, e quindi una stima esplicita del valore del funzionale (con la miglior costante possibile).

Di qui l'importanza di definire opportune "simmetrizzazioni" di insiemi e di funzioni, e studiarne le proprietà. *Simmetrizzare un oggetto significa sostituirlo con uno che ha determinate simmetrie, ma conserva inalterate certe proprietà dell'oggetto di partenza.* Ci sono vari tipi di simmetrizzazioni:

- *Simmetrizzazione di Steiner*, 1936.
- *Simmetrizzazioni di Schwarz*, da Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921, Polacco, che nel 1884 dimostrò il teorema isoperimetrico nello spazio.

Parleremo soprattutto di queste ultime, che nella loro formulazione moderna sono legate ai *riarrangiamenti di funzioni alla Hardy-Littlewood* (v. Hardy-Littlewood [27] e Hardy-Littlewood-Pólya [28]). Per un inventario di altri tipi di simmetrizzazioni, si veda ad esempio Kawohl [30].

Anche sui problemi isoperimetrici della fisica matematica vale l'osservazione fatta riguardo al problema isoperimetrico classico: tante persone si sono occupate successivamente degli stessi problemi, perché li hanno affrontati in crescente generalità (dal caso  $n = 2, 3$  al caso  $n$  generico) e perché la consapevolezza critica è cresciuta nel tempo. Una dimostrazione rigorosa e generale dei risultati di Pólya-Szegő (fine anni '40) richiede idee di teoria geometrica della misura in  $\mathbb{R}^n$  che si sono affermate a fine anni '50-inizio anni '60. Talenti, con 2 lavori fondamentali del 1976 (v. [42], [43]) ha avuto il merito storico di far uscire queste idee dalla cerchia degli specialisti di teoria geometrica della misura e mostrare come si potevano applicare:

- alla dimostrazione dei teoremi di Pólya-Szegő;
- alla determinazione delle migliori costanti nella disuguaglianza di Sobolev;
- a stime a priori ottimali per soluzioni di equazioni a derivate parziali.

Vediamo quindi ora (§2) di introdurre le definizioni e proprietà fondamentali dei riarrangiamenti di Hardy-Littlewood e delle simmetrizzazioni di Schwarz, e di mostrare come mediante queste proprietà si possano dimostrare le 3 congetture classiche citate e un altro famoso risultato sulla migliore costante nelle disuguaglianze di Sobolev.

## 2. Riarrangiamenti, simmetrizzazioni, e applicazioni a problemi variazionali

### 2.1. Definizioni

Data una funzione misurabile  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ), si definisce la sua **funzione di distribuzione**

$$\mu_u(t) = |\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}| \quad (\text{per } t \geq 0).$$

Qui e nel seguito,  $|E|$  denota la misura di Lebesgue di  $E$ .

Proprietà elementari:  $\mu_u(t)$  è monotona decrescente (non strettamente) e continua da destra (come si verifica immediatamente dalla definizione). Invece, non è necessariamente continua da sinistra:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} [\mu_u(t-h) - \mu_u(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} |\{x \in \Omega : t-h < |u(x)| \leq t\}| = |\{x \in \Omega : |u(x)| = t\}|.$$

Dunque l'eventuale "salto" di discontinuità di  $\mu_u$  ha un significato ben preciso: è la misura dell'insieme su cui  $|u(x)| = t$ . Affinché  $\mu_u$  sia continua è dunque necessario che il grafico di  $u$  non abbia "pianerottoli" (o "altopiani") di misura positiva. Qualche esempio di grafico di funzione di distribuzione è mostrato nelle figure in fondo al testo (figure A e B, pp.28-31).

Mediante  $\mu_u$  si può calcolare qualsiasi norma<sup>1</sup> di  $u$  del tipo  $\int A(|u(x)|) dx$ :

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx = - \int_0^{\infty} A(t) [d\mu_u(t)] \quad \text{se } A \text{ continua.} \quad (1)$$

Dimostrazione (sketch). Supponiamo per semplicità  $u \in L^{\infty}$ , dividiamo l'intervallo  $[0, \|u\|_{\infty}]$  in  $k$  intervallini e calcoliamo l'integrale a secondo membro come limite di somme di Stieltjes:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\|u\|_{\infty}} A(t) [d\mu_u(t)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k A(t_j) [\mu_u(t_{j-1}) - \mu_u(t_j)] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k A(t_j) |\{x \in \Omega : t_{j-1} < |u(x)| \leq t_j\}| = \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx. \end{aligned}$$

Il **riordinamento** (o **riarrangiamento**) **decrescente** (o di Hardy-Littlewood) di  $u$ , indicato con  $u^*$ , si può definire al modo seguente. Data  $u$  come sopra, calcoliamo  $\mu_u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , e calcoliamo ora la funzione di distribuzione della funzione di distribuzione  $\mu_u$ . Si pone:

$$u^*(s) = \mu_{\mu_u}(s).$$

Poiché  $u^*$  è la funzione di distribuzione di  $\mu_u$ , che è una funzione monotona non crescente, è

<sup>1</sup> Ad esempio norma  $L^p$ , o più in generale norma di spazi di Orlicz.

facile rendersi conto che:

$$u^*(s) = \sup\{t \geq 0 : \mu(t) > s\} = \min\{t \geq 0 : \mu(t) \leq s\}.$$

La funzione  $u^*$  è detta "inversa generalizzata di  $\mu_u$ ". E' esattamente l'inversa di  $\mu_u$  quando questa è continua e strettamente decrescente. Nei grafici riportati in fondo al testo vi sono esempi da cui si osserva il comportamento di  $u^*$  quando  $\mu_u$  presenta salti oppure è costante su un intervallo.

Si verifica che la funzione  $u^*$  è *equidistribuita* rispetto a  $u$ , ossia

$$\mu_{u^*}(t) = \mu_u(t).$$

Quindi, in base alla (1),  $u$  e  $u^*$  hanno le stesse norme  $L^p$ , di Orlicz, ecc.

Si può ora definire la **simmetrizzata di Schwarz** di  $u$ , indicata con  $u^\#$  (o talvolta con  $u^\star$ ):

$$u^\#(x) = u^*(c_n|x|^n)$$

con

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \text{volume della sfera unitaria in } \mathbb{R}^n.$$

La definizione di  $u^\#$  implica che *anche questa è equidistribuita* ad  $u$  (e  $u^*$ ). A differenza di  $u^*$ , che è una funzione di variabile reale,  $u^\#$  è definita su  $\mathbb{R}^n$  come  $u$ , inoltre è una funzione radiale e radialmente decrescente.

E' possibile, a partire da  $u^*$ , definire altri tipi di simmetrizzazioni di  $u$ , v. Kawohl [30].

Citiamo di sfuggita un tipo più antico di simmetrizzazione, quello dovuto a Steiner, 1936. Fissata una retta  $r$  nel piano, **il simmetrizzato di Steiner di un insieme  $E$  nel piano** è l'insieme, simmetrico rispetto ad  $r$ , tale che ogni retta perpendicolare ad  $r$  taglia su  $E$  e sul suo simmetrizzato sezioni di ugual lunghezza. (v. figura E a p.34). La **simmetrizzata di Steiner di una funzione**  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione  $u^\#$  i cui insiemi di livello  $\{u^\# > t\}$  sono i simmetrizzati di Steiner dei corrispondenti insiemi di livello di  $u$ ,  $\{u > t\}$  (v. figura F a p.35). Analoghe definizioni si possono dare in  $\mathbb{R}^3$  (simmetrizzazione rispetto a un piano).

## 2.2. Alcune proprietà di riarrangiamenti e simmetrizzazioni

Citeremo qui solo alcune proprietà che utilizzeremo in seguito o che hanno facile dimostrazione.

**1. Il Teorema di Hardy-Littlewood:** *date due funzioni misurabili  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\int_{\Omega} f(x)g(x) dx \leq \int_0^{|\Omega|} f^*(s)g^*(s) ds = \int_{\Omega^\#} f^\#(x)g^\#(x) dx$$

$$\int_E f(x) dx \leq \int_0^{|E|} f^*(s) ds = \int_{E^\#} f^\#(x) dx \quad \forall E \subset \Omega$$

dove  $\Omega^\#$  denota la sfera di  $\mathbb{R}^n$  centrata nell'origine e avente misura  $|\Omega|$ .

C'è un'idea combinatoria della dimostrazione, molto trasparente: supponiamo che un amico generoso mi faccia la seguente proposta: "Io ho in tasca banconote da 50, 20, 10 e 5 euro, e posso dartene 1 di un tipo, 2 di un altro, 3 di un altro, 4 di un altro: come le vuoi assortite?" La risposta è ovvia: ne voglio 4 da 50 euro (tanto per cominciare bene!), poi 3 da

20 euro, 2 da 10 euro e una da 5 euro. Più in generale: se ho due sequenze di numeri positivi  $f_i, g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), e voglio moltiplicare ogni numero  $f_i$  per un certo numero  $g_i$  e poi sommare questi prodotti, come devo appaiare i numeri per massimizzare il risultato? Converterà moltiplicare il massimo degli  $f_i$  con il massimo dei  $g_i$ , e poi via via decrescendo. Se alle somme sostituiamo integrali, otteniamo l'enunciato della prima disuguaglianza nel Teorema di Hardy-Littlewood.

La seconda disuguaglianza di Hardy-Littlewood è un caso particolare della prima, per  $g = \chi_E$ . Notiamo che nella seconda disuguaglianza c'è un caso importante in cui vale l'uguale:

$$\int_{u>t} u(x) dx = \int_0^{\mu_u(t)} u^*(s) ds$$

(per  $u$  positiva) e questo perché  $u^*(s) \cdot \chi_{[0, \mu_u(t)]}(s)$  è il riarrangiamento decrescente di  $u(x) \cdot \chi_{\{u>t\}}(x)$ .

**2. L'operatore  $u \mapsto u^*$  va da  $L^p$  in  $L^p$ ; conserva le norme; non è lineare; è contrattivo:**

$$\int A(u^* - v^*) ds \leq \int A(|u| - |v|) dx$$

se  $A(t)$  è crescente, convessa,  $A(0) = 0$ . Quest'ultimo risultato è dovuto a Chiti [16].

Per norme  $L^2$  è una conseguenza banale del Teorema di Hardy-Littlewood:

$$\int (u^* - v^*)^2 ds = \int [(u^*)^2 + (v^*)^2 - 2u^*v^*] ds.$$

Ora i primi due addendi uguagliano quelli analoghi di  $\int (u - v)^2$ , l'ultimo di *minora* con Hardy-Littlewood.

**3. Regolarità di  $u^*$ :** l'operatore di riarrangiamento è globale; non conserva la regolarità "alta" di  $u$ : anche se  $u$  è  $C^\infty$ ,  $u^*$  è solo lipschitziana (v. esempi nei grafici a pp.30-1). Il risultato positivo che si può dimostrare è:

**Teorema di Pólya-Szegő.** Se  $u$  è lipschitziana a supporto compatto anche  $u^\#$  lo è e vale la disuguaglianza

$$\|Du^\#\|_p \leq \|Du\|_p$$

(dove  $D$  indica il gradiente).

Il teorema si applica di solito con  $u$  definita in  $\Omega$  limitato e nulla al bordo. (v. grafici di pp.32-33 per capire significato dell'ipotesi "nulla al bordo").

Mostriamo una dimostrazione geometrica di Pólya (1948) nel caso  $n = 2, p = 2$  (Questa dimostrazione è citata da Trombetti, [51]).

**"Dimostrazione".** Sia  $u > 0$  e nulla al bordo, consideriamo il sottografico di  $u$  come un solido in  $\mathbb{R}^3$ ; simmetrizzando  $u$ , il volume resta costante mentre l'area della sua superficie diminuisce (intuitivo ma non banale! In effetti Pólya-Szegő provano questo teorema per la simmetrizzazione di Steiner di funzioni di 2 variabili, dopo aver provato che la simmetrizzazione di Steiner di insiemi in  $\mathbb{R}^3$  diminuisce l'area del bordo dell'insieme); quest'area è la somma dell'area di base, che resta inalterata ( $|\Omega| = |\Omega^\#|$ ) e della superficie



laterale, cioè l'area del grafico, che quindi diminuisce. Ossia:

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx dy \geq \int_{\Omega^{\#}} \sqrt{1 + |Du^{\#}|^2} \, dx dy.$$

Se ora sostituiamo ad  $u$  la funzione  $\varepsilon u$  otteniamo

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |Du|^2} \, dx dy \geq \int_{\Omega^{\#}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |Du^{\#}|^2} \, dx dy.$$

Sviluppiamo in  $\varepsilon$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\int_{\Omega} \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |Du|^2 + o(\varepsilon^2) \right] \, dx dy \geq \int_{\Omega^{\#}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |Du^{\#}|^2 + o(\varepsilon^2) \right] \, dx dy$$

da cui semplificando per  $|\Omega|$  (ancora perché  $|\Omega| = |\Omega^{\#}|$ ), poi per  $\varepsilon^2$ , e quindi facendo tendere a zero  $\varepsilon$ , si ha la tesi.  $\square$

Naturalmente questa dimostrazione funziona se  $n = 2, p = 2$ , e supponendo di sapere già che  $u$  e la sua simmetrizzata sono regolari, in modo da poterne calcolare l'area del grafico a questo modo, e applicando la disuguaglianza isoperimetrica; inoltre, stiamo dando per buono che la simmetrizzazione di Schwarz non aumenta l'area del grafico.

Notiamo anche che il Teorema di Pólya-Szegő *non* significa che l'operatore di simmetrizzazione sia continuo su  $W^{1,p}$  (ricordare che l'operatore non è lineare). Anzi: è noto che, tranne nel caso unidimensionale, *non è continuo*: v. Almgren, Lieb [1].

### 2.3. Applicazioni del teorema di Pólya-Szegő

Vedremo in seguito (§3.3) come si può dimostrare rigorosamente il teorema di Pólya-Szegő. Mostriamo ora come questo teorema permetta di rispondere semplicemente a vari problemi enunciati nell'introduzione.

#### Congettura di Saint-Venant sulla rigidità torsionale

Sia  $S(\Omega)$  la rigidità torsionale di  $\Omega$  (ossia di una sbarra cilindrica di materiale omogeneo elastico, avente per sezione  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ). La teoria dell'elasticità afferma che, a meno di costante moltiplicativa,

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx$$

dove  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  risolve

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il Calcolo delle Variazioni insegna che allora  $u$  risolve il problema

$$\min \{ J(u) : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \}$$

con

$$J(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx - 2 \int_{\Omega} u dx.$$

D'altro canto, se  $u_0$  rende minimo il funzionale  $J$ , moltiplicando l'equazione  $-\Delta u_0 = 1$  per  $u_0$  e integrando per parti in  $\Omega$  si trova che  $\int_{\Omega} |Du_0|^2 dx = \int_{\Omega} u_0 dx$ , e quindi

$$J(u_0) = \int_{\Omega} |Du_0|^2 dx - 2 \int_{\Omega} |Du_0|^2 dx = -S(\Omega).$$

Quindi la rigidità torsionale è l'opposto del minimo del funzionale  $J$ .

Se ora confrontiamo  $J(u_0)$  con  $J(u_0^\#)$ , il teorema di Pólya-Szegő e la equidistribuzione di  $u_0$  e  $u_0^\#$  implicano

$$\begin{aligned} -S(\Omega) = J(u_0) &= \int_{\Omega} |Du_0|^2 dx - 2 \int_{\Omega} u_0 dx \geq \int_{\Omega^\#} |Du_0^\#|^2 dx - 2 \int_{\Omega} u_0 dx = \\ &= \int_{\Omega^\#} |Du_0^\#|^2 dx - 2 \int_{\Omega^\#} u_0^\# dx = -S(\Omega^\#) \end{aligned}$$

e quindi

$$S(\Omega^\#) \geq S(\Omega).$$

Notiamo che per  $\Omega^\#$ , che è un cerchio, la rigidità torsionale si calcola esplicitamente risolvendo il problema (unidimensionale!)

$$\begin{cases} -\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho}\right) = 1 & \text{in } [0, R] \\ u(R) = 0; u \text{ limitata in } 0 & \text{con } \pi R^2 = |\Omega|. \end{cases}$$

Si trova

$$u(\rho) = \frac{1}{4}(R^2 - \rho^2), \text{ da cui } S(\Omega^\#) = 2\pi \int_0^R \rho \cdot \frac{1}{4}\rho^2 d\rho = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{|\Omega|^2}{\pi^2}.$$

In definitiva si ha la stima per la rigidità torsionale di una sbarra di sezione  $\Omega$ :

$$S(\Omega) \leq \frac{|\Omega|^2}{8\pi}$$

che è un bell'esempio di ciò che Pólya-Szegő chiamano "stimare una grandezza fisica non facilmente accessibile sulla base di dati geometrici facilmente accessibili" (v. brano di [39] citato nel §1).

### **Congettura di Rayleigh sulla frequenza fondamentale di una membrana**

Per una membrana elastica omogenea fissata al bordo, le frequenze di vibrazione sono gli autovalori del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

dove  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è la sagoma a riposo della membrana. E' noto che il primo autovalore di questo

problema,  $\lambda_0$ , soddisfa:

$$\lambda_0 = \min \{ J(u) : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \}, \text{ con } J(u) = \frac{\int_{\Omega} |Du|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

( $\lambda_0$  minimizza in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  il "quoziente di Rayleigh"). Ora:

$$J(u) = \frac{\int_{\Omega} |Du|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} \geq \frac{\int_{\Omega^{\#}} |Du^{\#}|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} = \frac{\int_{\Omega^{\#}} |Du^{\#}|^2 dx}{\int_{\Omega^{\#}} u^{\#2} dx} = J(u^{\#}) \geq \lambda_0(\Omega^{\#})$$

e passando al minimo al variare di  $u$ ,

$$\lambda_0(\Omega) \geq \lambda_0(\Omega^{\#})$$

che è la congettura di Rayleigh. Il problema agli autovalori iniziale si può risolvere esplicitamente sul cerchio (scrivendo l'equazione in coordinate polari, usando il metodo di separazione di variabili, che porta ad una equazione di Bessel), per cui si ottiene una versione quantitativa di questa stima. Scriviamo il risultato in  $\mathbb{R}^n$  per  $n$  qualsiasi:

se  $\lambda_0(\Omega)$  è il primo autovalore del problema (2) (dove ora  $\Omega$  è un dominio limitato di  $\mathbb{R}^n$ ), vale la disuguaglianza

$$\lambda_0(\Omega) \geq c_n^{2/n} |\Omega|^{-2/n} j_{n/2-1,1}^2$$

dove  $j_{n/2-1,1}$  indica il primo zero della funzione di Bessel  $J_{n/2-1}$ , e  $c_n$  il volume della sfera unitaria in  $\mathbb{R}^n$ .

### **Digressione sui tamburi**

La risposta positiva al problema apre altre domande. Ricordiamo l'interpretazione musicale della congettura di Rayleigh: tra tutti i tamburi di forma variabile e area fissata, quello che produce la nota (= frequenza fondamentale di vibrazione) più bassa è quello circolare. E' noto che il segno di uguale nella disuguaglianza di Pólya-Szegö *non vale soltanto* per la sfera. Dunque, sapere che 2 tamburi (di ugual area) hanno la stessa frequenza fondamentale di vibrazione non garantisce che siano uguali. Ma se avessero *tutti* gli autovalori uguali? E' il problema posto da Marc Kac nel 1966: "Can one hear the shape of a drum?" (v. [29]). Si può udire la forma di un tamburo? Più in generale: una varietà riemanniana è determinata, a meno di isometrie, dal suo spettro?

Milnor, nel 1964, provò che per le varietà è falso, in generale: ci sono contresempi in dimensione 16.

In positivo, è noto che si può udire l'area di un tamburo, il suo perimetro, e il numero dei suoi buchi. (Ovvero: se per il laplaciano tutti gli autovalori di due domini limitati del piano sono uguali, allora i due domini hanno ugual area, perimetro e numero di buchi).

Nel 1992, Carolyn Gordon, David Webb e Scott Wolpert [26] trovarono contresempi in dimensione 2: ci sono 2 tamburi di forma diversa che hanno la stessa area, lo stesso perimetro, non hanno buchi, e hanno lo stesso spettro. *Quindi non si può udire la forma di un tamburo.* (v. figura G p. 36).

### **Conggettura di Poincaré sulla capacità elettrostatica**

La capacità elettrostatica di un solido di materiale omogeneo, a meno di costante moltiplicativa è assegnata da

$$\text{Cap}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} |Du|^2 dx$$

dove il potenziale elettrostatico  $u$  risolve il problema di Dirichlet (esterno)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ u = 1 & \text{su } \partial\Omega \\ u = 0 & \text{all}'\infty \end{cases}$$

Una caratterizzazione variazionale della capacità è la seguente:

$$\text{Cap}(\Omega) = \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx : u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3), u \geq 1 \text{ in } \Omega \right\}.$$

Ora, se  $u_0$  è il potenziale capacitario, cioè che rende minimo  $J(u)$ , si ha:

$$\text{Cap}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^3} |Du_0|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} |Du_0^\#|^2 dx$$

Ma per ipotesi  $u_0 \geq 1$  in  $\Omega$ , quindi  $\mu_{u_0}(1) \geq |\Omega|$ , che è lo stesso che dire  $\mu_{u_0^\#}(1) \geq |\Omega^\#|$  (perché  $\Omega$  e  $\Omega^\#$  hanno ugual misura e  $u, u^\#$  sono equidistribuite); dunque  $u_0^\# \geq 1$  in  $\Omega^\#$ , perciò  $\int_{\mathbb{R}^3} |Du_0^\#|^2 dx \geq \text{Cap}(\Omega^\#)$ , che implica

$$\text{Cap}(\Omega) \geq \text{Cap}(\Omega^\#)$$

ossia la congettura di Poincaré.

Di nuovo, per la sfera si può risolvere esplicitamente il problema differenziale (unidimensionale):

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_\rho = 0 & \text{per } \rho > R \\ u = 1 & \text{per } \rho = R \\ u = 0 & \text{per } \rho \rightarrow \infty \end{cases}$$

Si trova:

$$u(\rho) = \frac{R}{\rho}; \quad \text{Cap}(\Omega^\#) = 4\pi \int_R^\infty \rho^2 \frac{R^2}{\rho^4} d\rho = 4\pi R$$

e ponendo  $|\Omega| = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,  $4\pi R = 4\pi \sqrt[3]{\frac{3|\Omega|}{4\pi}} = \sqrt[3]{48\pi^2|\Omega|}$ , da cui

$$\text{Cap}(\Omega) \geq \sqrt[3]{48\pi^2|\Omega|}.$$

### Le migliori costanti nella disuguaglianza di Sobolev

Un'applicazione originale del teorema di Pólya-Szegő è quella che consentì a Talenti [43] di determinare la migliore costante nella disuguaglianza di Sobolev. Consideriamo la disuguaglianza in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^n$ , nel caso  $p < n$ :

$$\|u\|_{p^*} \leq c \|Du\|_p \quad \text{con} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Si vuole trovare la costante  $c$  ottimale. Per far questo si considera

$$J(u) = \frac{\|Du\|_p}{\|u\|_{p^*}}.$$

Il teorema di Pólya-Szegő (questa volta nella versione  $L^p$  con  $p$  qualsiasi) implica che il funzionale diminuisce se si sostituisce ad  $u$  la sua simmetrizzata di Schwarz; con tecniche di calcolo delle variazioni unidimensionali, si prova quindi che questo funzionale (unidimensionale) assume il suo minimo con le funzioni di tipo  $u(r) = (a + br^{p/(p-1)})^{1-n/p}$ , in corrispondenza delle quali il valore del funzionale (calcolato esplicitamente) dà la miglior costante possibile. Si può quindi concludere che

$$\|u\|_{p^*} \leq c \|Du\|_p$$

con

$$c = \pi^{-1/2} n^{-1/p} \left( \frac{p-1}{n-p} \right)^{1-1/p} \left\{ \frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)} \right\}^{1/n}$$

e vale il segno di uguale se  $u(x) = (a + b|x|^{p/(p-1)})^{1-n/p}$ ,  $a, b > 0$ .

### 3. Che cosa c'è dietro?

Una dimostrazione rigorosa e generale della disuguaglianza di Pólya-Szegő coinvolge alcune idee di teoria geometrica della misura, emerse tra la fine degli anni '50 e gli anni '60. Le idee fondamentali sono sostanzialmente 2:

- la disuguaglianza isoperimetrica (geometrica)
- il teorema di Federer-Fleming-Rishel, o "formula della coarea".

A questo proposito, Talenti (v. [43], p.353) scrive:

Sobolev inequalities, also called Sobolev imbedding theorems, are very popular among writers in partial differential equations or in the calculus of variations, and have been investigated by a great number of authors. Nevertheless there is a question concerning Sobolev inequalities, which seems well-known only to a restricted number of specialists working in geometric measure theory. The question is the connection between Sobolev inequalities and the classical isoperimetric inequality for subsets of euclidean spaces. Our aim is to advertise such a connection.

Questi due strumenti non solo permettono di dimostrare la disuguaglianza di Pólya-Szegő (fondamento delle applicazioni delle tecniche di simmetrizzazione al calcolo delle variazioni), ma sono direttamente coinvolte nelle applicazioni delle tecniche di simmetrizzazione alle stime a priori per equazioni a derivate parziali (che illustreremo nella §4). Si può ben dire che la "pubblicità" fatta a queste idee nei due lavori citati di Talenti 1976 abbia avuto effetti positivi, che durano ancor oggi.

### 3.1. Perimetro e disuguaglianza isoperimetrica

Ricordiamo ancora una volta l'enunciato classico del teorema isoperimetrico (nello spazio):

tra tutti i solidi di assegnata area della superficie totale, quello di volume massimo è la sfera o equivalentemente:

tra tutti i solidi di assegnato volume, quello di minima area della superficie totale è la sfera.

Abbiamo già ricordato una breve storia di questo problema. La parola definitiva sull'argomento è il Teorema di De Giorgi del 1958, di cui qui vogliamo chiarire l'enunciato.

Diamo anzitutto una forma variazionale al problema, introducendo esplicitamente un funzionale di insieme. Per ogni insieme  $E$  Lebesgue misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo il quoziente:

$$J(E) = \frac{P(E)}{|E|^{\frac{n-1}{n}}}$$

dove  $|E|$  è la misura di Lebesgue di  $E$ , mentre  $P(E)$  sta per "perimetro di  $E$ ": se  $E$  ha frontiera regolare,  $P(E)$  coincide con la misura  $(n-1)$ -dimensionale di  $\partial E$ ; vedremo fra poco come si definirà in generale  $P(E)$ . Notare che  $J(E)$  è stato definito in modo da essere adimensionale (invariante per dilatazioni). Di questo funzionale si vuole dimostrare che ha minimo, e tale minimo è assunto se  $E$  è una sfera.

Il problema è dare una definizione corretta di perimetro, sufficientemente debole da permettere di individuare una classe abbastanza ampia di insiemi, in cui si possa dimostrare un opportuno criterio di compattezza, che consenta di provare che il funzionale ha minimo.

Una nozione utile di perimetro è stata introdotta da Caccioppoli nel 1952 [14] e, in modo diverso (se pur logicamente equivalente), da De Giorgi nel 1954 [19]. L'approccio di De Giorgi è quello che si è rivelato più utile, e ha consentito a quest'ultimo nel 1958 [20] di provare la disuguaglianza isoperimetrica in  $\mathbb{R}^n$ . Un'esposizione leggibile di queste idee si trova in Talenti [48]. Qui ci limiteremo a dare definizioni ed enunciati precisi, senza dimostrare nulla.

#### Funzioni a variazione limitata e insiemi di perimetro finito

La definizione di perimetro alla De Giorgi ha a che vedere con la nozione di funzione (di  $n$  variabili) a variazione limitata. Introduciamo anzitutto questa definizione. Per le funzioni di una variabile, si dà una definizione di variazione totale di una funzione  $f$  (su un intervallo  $[a, b]$ ), come

$$V_a^b f = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

al variare di tutte le partizioni finite  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  di  $[a, b]$ ; si dimostra quindi che se  $f \in C^1[a, b]$ , allora  $V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx$ . Se invece  $f$  è una generica funzione  $BV$ , allora  $f$  è derivabile q.o. in  $[a, b]$ ; la sua derivata distribuzionale è una misura con segno, la cui variazione totale uguaglia la variazione totale di  $f$ , e si indica ancora col simbolo  $\int_a^b |f'(x)| dx$ . Per le funzioni di più variabili, la finitezza dell'integrale del modulo del gradiente (intesa in senso distribuzionale) viene presa come condizione che *definisce* lo spazio  $BV$  delle funzioni a variazione limitata. Si arriva quindi alla seguente definizione: se

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in L^1(\mathbb{R}^n),$

variazione totale di  $f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div} \underline{\varphi} dx : \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), |\underline{\varphi}| \leq 1 \right\}.$

Notare che se  $f$  è regolare risulta

$$\text{variazione totale di } f = \int_{\mathbb{R}^n} |Df| dx$$

come nel caso unidimensionale; inoltre, la variazione totale, finita o infinita, è ben definita per qualsiasi  $f$  integrabile; se risulta finita diremo che  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ .

Sia ora  $E$  un insieme Lebesgue misurabile di misura finita, e sia  $\chi_E$  la sua funzione caratteristica. Chiameremo **perimetro di  $E$** , e scriveremo  $P(E)$ , la variazione totale di  $\chi_E$ , e **insiemi di perimetro finito** (o **insiemi di Caccioppoli**) quelli per cui  $P(E) < \infty$ . Esplicitamente:

$$P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \underline{\varphi} dx : \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), |\underline{\varphi}| \leq 1 \right\}.$$

Se si potesse applicare il teorema della divergenza in  $E$ , si avrebbe

$$\int_E \operatorname{div} \underline{\varphi} dx = \int_{\partial E} \underline{\varphi} \cdot \underline{n} dS \leq H_{n-1}(\partial E)$$

(ricordando che l'integranda è il prodotto scalare di due vettori). Di più, è possibile scegliere il campo  $\underline{\varphi}$  in modo che  $\underline{\varphi} \cdot \underline{n}$  sia  $= 1$  (o quasi), perciò:

$$\text{se } E \text{ è un insieme a frontiera regolare, } P(E) = H_{n-1}(\partial E).$$

Si può dire che la definizione di perimetro di  $E$  è una definizione "debole" di misura  $(n-1)$ -dimensionale della frontiera di  $E$ , data in modo che su  $E$  il teorema della divergenza valga "per definizione". Proprio questa era l'idea di De Giorgi, come egli scrive nell'introduzione del lavoro [19] del '54 in cui dà questa definizione:

"La teoria della misura sviluppata in questo lavoro concerne le frontiere di insiemi di uno spazio euclideo  $S_r$ ; tali frontiere non sono riguardate come semplici insiemi di punti ma come insiemi orientati, per i quali si definisce non solo la misura assoluta ma anche la misura relativa delle proiezioni su un qualunque iperpiano. I fondamenti di questa teoria sono stati posti recentemente da R. Caccioppoli [14] (in generale per la misura  $(r-h)$ -dimensionale); contemporaneamente ed indipendentemente io ero pervenuto agli stessi risultati, partendo da un altro punto di vista e con intenti diversi. Caccioppoli si è proposto di dare una teoria generale dell'integrazione delle forme differenziali in più variabili ed una estensione completa delle formule di Green-Stokes. Il mio scopo invece era inizialmente una generalizzazione sostanziale di certi problemi isoperimetrici e partivo dalla formula di Gauss-Green come istanza a priori".

### Disuguaglianza isoperimetrica di De Giorgi

La nozione di perimetro di De Giorgi permette a questi di dimostrare un teorema di compattezza per la classe degli insiemi a perimetro finito (secondo un'opportuna nozione di

convergenza di successioni di insiemi), che gli consente di dimostrare in [20] il teorema isoperimetrico nella seguente forma:

**Teorema isoperimetrico di De Giorgi.** *Per ogni insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  di misura di Lebesgue finita, vale la disuguaglianza*

$$P(E) \geq n c_n^{1/n} |E|^{1-1/n}$$

dove  $c_n$  è il volume della sfera unitaria. Se  $E$  è una sfera, vale l'uguale. Notare che il primo membro può essere infinito.

L'osservazione "se  $E$  è una sfera vale l'uguale" discende dal fatto che la misura  $(n - 1)$ -dimensionale della superficie della sfera  $n$ -dimensionale vale  $n c_n$ . Per ricordarlo, osservare che

$$\frac{\partial}{\partial r} (c_n r^n) = n c_n r^{n-1}$$

ossia la superficie della sfera unitaria è la derivata rispetto al raggio del volume della sfera unitaria. Ricordiamo che  $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ .

### Relazioni tra perimetro "alla De Giorgi" e misura $(n - 1)$ -dimensionale

La nozione di perimetro di De Giorgi ha un carattere molto "debole" e quindi generale: si ricordi che è applicabile a qualunque insieme Lebesgue misurabile, per quanto "orribile" esso sia. Ciò non ostante, la relazione tra questa nozione ed altri modi più familiari di misurare l'area di una superficie si può spiegare in modo relativamente semplice. (Naturalmente, *dimostrare* che le cose stanno così non è affatto semplice invece).

Ricordiamo che la **misura di Hausdorff  $(n - 1)$ -dimensionale** di un insieme  $F \subset \mathbb{R}^n$  (che si può pensare come misura di superficie) è definita da:

$$H_{n-1}(F) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\rho < r} \left\{ \sum_{i=1}^k |B_i|^{(n-1)/n} : \text{ogni } B_i \text{ è una sfera di raggio } \leq \rho, \cup B_i \supseteq F, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Ricordiamo che la **densità di un punto  $x$  rispetto a un insieme  $E$**  misurabile è data, per definizione, da

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{|B_r(E)|}$$

dove  $B_r(x)$  è la sfera di centro  $x$  e raggio  $r$ . Se  $E$  è un aperto a frontiera regolare, la densità di un punto  $x$  rispetto ad  $E$  vale:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è esterno ad } E \\ 1 & \text{se } x \text{ è interno ad } E \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \text{ è di frontiera per } E \end{cases}$$

Se  $E$  ha frontiera lipschitziana e  $x$  è di frontiera, avrà densità compresa in  $(0, 1)$  (anche se non esattamente  $\frac{1}{2}$ ); se invece  $x$  è ad esempio un punto di cuspidе entrante (o uscente), avrà densità 1 (o 0, rispettivamente).

Dato un insieme  $E$  misurabile, definiamo **frontiera ridotta** di  $E$ , ed indichiamo con  $\partial^* E$ , l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  che hanno densità rispetto ad  $E$  compresa in  $(0, 1)$ .



Valgono allora le seguenti

**Proprietà del perimetro**

Dato un insieme  $E$  misurabile,  $E$  ha perimetro finito se e solo se  $H_{n-1}(\partial^* E) < \infty$ ; in tal caso

$$P(E) = H_{n-1}(\partial^* E) \leq H_{n-1}(\partial E).$$

In particolare, la disuguaglianza  $P(E) \leq H_{n-1}(\partial E)$  vale sempre, per cui il teorema isoperimetrico implica

$$H_{n-1}(\partial E) \geq nc_n^{1/n} |E|^{1-1/n}$$

che è una versione meno generale di quella originale, ma in compenso non fa intervenire la nozione di perimetro secondo De Giorgi.

Se ad esempio  $E$  ha frontiera lipschitziana,  $\partial^* E = \partial E$ , per cui vale proprio

$$P(E) = H_{n-1}(\partial E).$$

Qualunque sia  $E$  (misurabile), si può definire in q.o. punto (rispetto alla misura  $H_{n-1}$ ) di  $\partial^* E$  un "versore normale"  $\underline{n}$ , rispetto al quale vale il teorema della divergenza, nella forma:

$$\int_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx = \int_{\partial^* E} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dH_{n-1}.$$

Per ulteriori dettagli su questo argomento, si veda ad esempio [48], pp.100-111.

### 3.2. La formula di Federer-Fleming-Rishel

Se  $u$  è una funzione regolare, positiva, a supporto compatto, sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \, dx = \int_0^{+\infty} |\{x : u(x) > t\}| \, dt$$

(principio di Cavalieri!). C'è una formula analoga per l'integrale del gradiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du| \, dx = \int_0^{+\infty} P\{x : u(x) > t\} \, dt = \int_0^{+\infty} H_{n-1}\{x : u(x) = t\} \, dt.$$

Anzi, più in generale vale il seguente risultato di Federer 1959 [23], Fleming-Rishel 1960 [24]:

**Teorema.** Siano  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $u \in Lip(\mathbb{R}^n)$  a supporto compatto, positiva. Sia:

$$\varphi(t) = \int_{u>t} f(x) |Du(x)| \, dx.$$

Allora:

1.  $\varphi$  è assolutamente continua;
2. per q.o.  $t$ , vale

$$-\varphi'(t) = \int_{u=t} f(x) \, dH_{n-1}(x)$$

3.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|Du(x)| dx = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{u=t} f(x) dH_{n-1}(x) \right\} dt.$$

Diamo un'idea (non rigorosa) del perché questo risultato è vero.

1. Se  $f \geq 0$ ,  $\varphi$  è monotona decrescente; quindi se  $f$  è qualsiasi (integrabile),  $\varphi$  è a variazione limitata, in particolare è derivabile q.o.

Di più,  $\varphi$  è continua, infatti

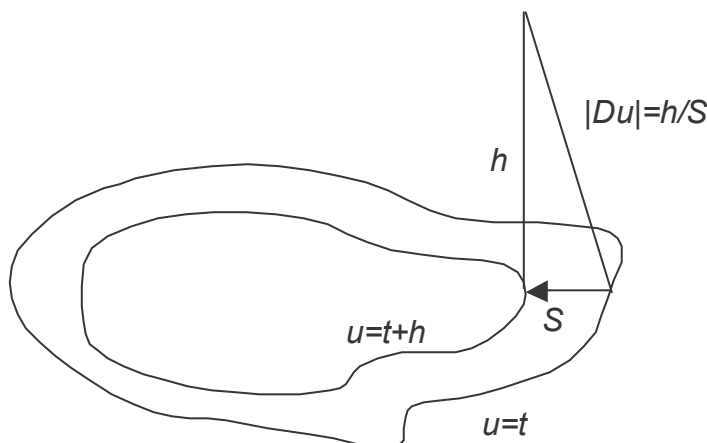
$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} [\varphi(t+h) - \varphi(t)] = \mp \int_{u=t} f(x)|Du(x)| dx = 0$$

perché: o l'insieme  $\{u = t\}$  ha misura nulla, oppure in esso  $|Du(x)| = 0$  q.o. (teorema di Morrey: una funzione costante su un insieme misurabile ha derivata q.o. nulla). Una funzione BV ha una parte assolutamente continua, una singolare, una discreta; abbiamo provato che  $\varphi$  è BV e non ha parte discreta (cioè è continua); si dovrebbe provare anche che non ha parte singolare, non lo facciamo.

2.

$$-\varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{t < u \leq t+h} f(x)|Du(x)| dx.$$

Ora se  $h$  è abbastanza piccolo, sull'insieme  $\{t < u \leq t+h\}$  vale all'incirca (v. figura):



$$|Du(x)| = \frac{h}{S} \text{ dove } S \text{ è lo "spessore" dell'insieme } \{t < u \leq t+h\}.$$

Questo, almeno, è vero se  $t$  non è un valore critico, e  $u$  è regolare in un intorno della linea di livello  $u = t$ . Se  $u$  è regolare, q.o.  $t$  non è un valore critico (teorema di Sard). Mettiamoci in queste ipotesi. Allora

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{t < u \leq t+h} f(x)|Du(x)| dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{S} \int_{t < u \leq t+h} f(x) dx = \int_{u=t} f(x) dH_{n-1}(x)$$

nelle ipotesi precedenti, e supponendo anche  $f$  continua in  $\{u = t\}$ . (Calcoliamo l'integrale  $\{t < u \leq t+h\}$  in coordinate "polari" adattate alle linee di livello, e applichiamo un teorema del valor medio alla parte radiale dell'integrale).

3. Si conclude osservando che, per l'assoluta continuità di  $\varphi$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|Du(x)| dx = \varphi(0) = \int_0^\infty \{-\varphi'(t)\} dt = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{u=t} f(x) dH_{n-1}(x) \right\} dt.$$

□

### 3.3. Dimostrazione del Teorema di Pólya-Szegö

Mostriamo una dimostrazione "quasi rigorosa" della disuguaglianza di Pólya-Szegö (per semplicità solo per  $p = 2$ , e supponendo  $u$  regolare). Sia  $u > 0$  (altrimenti si separa parte positiva e negativa) e nulla al bordo di  $\Omega$ .

L'idea è minorare l'integrale  $\int_{\Omega} |Du|^2 dx$  con qualcosa che dipende da  $u$  solo tramite  $\mu_u(t)$ , in modo che se al posto di  $u$  c'è  $u^\#$  valga il segno di  $=$ .

Applichiamo il Teorema di Federer-Fleming-Rishel (d'ora in poi FFR) con  $f(x) = |Du(x)|$ .

Per  $t > 0$ , l'insieme  $\{u > t\}$  è contenuto con compattezza in  $\Omega$ , in particolare il suo bordo non tocca  $\partial\Omega$ . Per il punto 2 di FFR, la funzione

$$\varphi(t) = \int_{u>t} |Du|^2 dx$$

è assolutamente continua, e per q.o.  $t$  vale

$$-\varphi'(t) = \int_{u=t} |Du(x)| dH_{n-1}(x). \quad (3)$$

Ora applichiamo il punto 2 di FFR a  $f(x) = \frac{1}{|Du(x)|}$ , su un livello  $t$  per cui è lecito (non critico ecc.). Ne segue che per q.o.  $t$ ,

$$\mu_u(t) = \int_{u>t} dx$$

è derivabile e

$$-\mu'_u(t) = \int_{u=t} \frac{1}{|Du(x)|} dH_{n-1}(x). \quad (4)$$

Dalla (3) e (4) abbiamo:

$$\begin{aligned} H_{n-1}\{u = t\} &= \int_{u=t} dH_{n-1}(x) \leq (\text{Schwarz}) \\ &\leq \left( \int_{u=t} \frac{1}{|Du(x)|} dH_{n-1}(x) \right)^{1/2} \left( \int_{u=t} |Du(x)| dH_{n-1}(x) \right)^{1/2} = \\ &= (-\mu'_u(t))^{1/2} (-\varphi'(t))^{1/2} \end{aligned}$$

Ora usiamo la disuguaglianza isoperimetrica (qui si usa il fatto che essendo  $u = 0$  al bordo, per  $t > 0$  l'insieme  $\{u > t\}$  è contenuto con compattezza in  $\Omega$  e  $\partial\{u > t\} = \{u = t\}$ , se  $t$  non è un valore critico) e scriviamo

$$nc_n^{1/n} \mu_u(t)^{1-1/n} \leq H_{n-1} \{u = t\} \leq (-\mu'_u(t))^{1/2} (-\varphi'(t))^{1/2}$$

che si può riscrivere come:

$$(nc_n^{1/n})^2 \frac{\mu_u(t)^{2-2/n}}{-\mu'_u(t)} \leq -\varphi'(t) = -\frac{d}{dt} \int_{u>t} |Du(x)|^2 dx \quad (5)$$

Per quanto detto, se  $u$  è regolare la (5) è vera per q.o.  $t$ . Integrando in  $t$  otteniamo:

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{d}{dt} \int_{u>t} |Du(x)|^2 dx \right\} dt \geq (nc_n^{1/n})^2 \int_0^{\infty} \frac{\mu_u(t)^{2-2/n}}{-\mu'_u(t)} dt.$$

Il secondo membro dipende da  $u$  solo attraverso la sua funzione di distribuzione; se rifacciamo gli stessi passaggi per la  $u^{\#}$  troviamo lo stesso secondo membro; ma in più, nelle 2 disuguaglianze scritte vale l'uguale, perché:

gli insiemi di livello di  $u^{\#}$  sono sfere, perciò nella disuguaglianza isoperimetrica vale l'uguale;

gli insiemi  $\{u = t\}$  sono superfici di sfere, su cui (essendo  $u^{\#}$  radiale),  $|Du^{\#}|$  è costante, perciò nella disuguaglianza di Schwarz scritta le due funzioni integrande sono costanti, e vale il segno di uguale.

Ne segue che

$$\int_{\Omega^{\#}} |Du^{\#}|^2 dx = (nc_n^{1/n})^2 \int_0^{\infty} \frac{\mu_u(t)^{2-2/n}}{-\mu'_u(t)} dt$$

e quindi

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx \geq \int_{\Omega^{\#}} |Du^{\#}|^2 dx.$$

Problema: affinché la dimostrazione precedente sia completa dovrei sapere che:

- 1) la dimostrazione per  $u$  è vera sotto la sola ipotesi  $u$  lipschitziana nulla al bordo;
- 2) sotto quest'ipotesi, anche  $u^{\#}$  è lipschitziana (e nulla al bordo).

La seconda cosa si può provare ancora come applicazione astuta del Teorema FRR. (Si veda ad es. [43]). □

### Estensioni di questo teorema

Nel teorema di Pólya-Szegő si assume  $u = 0$  al bordo; l'ipotesi non è puramente tecnica, senza di essa la simmetrizzata può avere gradiente non  $L^2$ . Tuttavia si può provare che se, ad esempio,  $u$  si annulla su una parte della frontiera di misura  $H_{n-1}$  positiva, il risultato continua a valere, nella forma

$$c \int_{\Omega} |Du|^2 dx \geq \int_{\Omega^{\#}} |Du^{\#}|^2 dx$$

dove  $c \geq 1$  è una costante geometrica indipendente da  $u$  (ma dipendente dalla misura della parte di bordo su cui si annulla). Se invece  $u$  è una generica funzione di  $H^{1,2}(\Omega)$ , in generale sarà  $u^{\#} \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega^{\#})$ , e  $|Du^{\#}|^2$  può non essere integrabile vicino al bordo. Questi risultati sono dovuti a Bramanti, [12].

## 4. Simmetrizzazioni ed equazioni a derivate parziali

L'idea di applicare tecniche di simmetrizzazione per ottenere stime a priori per soluzioni di equazioni a derivate parziali (diverse dal laplaciano, a cui in un certo senso si riferiscono alcuni dei risultati variazionali discussi in precedenza) è molto più recente delle applicazioni di queste tecniche ai problemi variazionali. Se per questi ultimi una trattazione sostanzialmente matura si trova già a fine anni 1940 con Pólya e Szegő, e ha le sue radici in ricerche di 100 anni prima, per le applicazioni alle equazioni a derivate parziali si deve aspettare gli anni 1960.

Il primo lavoro in questa direzione è di Weinberger, del 1962 [52]. Si considera il problema di Dirichlet su un dominio  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con coefficienti  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ , e

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega$$

(la costante di ellitticità si assume uguale ad 1 in modo che, formalmente, il laplaciano sia un caso particolare simile). Weinberger ottiene la miglior costante possibile nella stima a priori (già nota, Stampacchia 1958):

$$|u(x)| \leq c \|f\|_p \quad \text{per } p > n/2.$$

Per far questo, stima la norma  $L^p$  della funzione di Green dell'operatore usando tecniche di simmetrizzazione. Il lavoro di Weinberger è conosciutissimo da chi si occupa di questi argomenti, tuttavia non ebbe un seguito per parecchi anni.

Il lavoro del 1969 di Mazja, [36], per contro, si muoveva in uno spirito un po' diverso. In esso le tecniche di simmetrizzazione erano utilizzate per provare stime a priori non necessariamente ottimali, ma *nuove*, ossia per provare la solubilità di problemi al contorno per equazioni ellittiche che per qualche ipotesi sui termini dell'equazione o sulle condizioni al contorno non rientravano nelle teorie esistenti a quel tempo. Questo lavoro, scritto nel 1969 in russo e tradotto in inglese nel 1971, apparentemente restò semisconosciuto in occidente per vari anni: da una veloce ricerca bibliografica, mi sembra che nei lavori sulle simmetrizzazioni apparsi in seguito in occidente, il lavoro di Mazja non venga citato fino al 1985, quando ormai lo studio di questi temi aveva preso piede per altri motivi.

Il detonatore delle ricerche su "simmetrizzazioni e P.D.E." fu invece il lavoro di Talenti [42], del 1976, che ebbe un seguito immediato e duraturo. Il motivo non era solo nei risultati in esso contenuti, ma nello stile espositivo, che "insegnò un nuovo mestiere" a molti lettori.

Nel seguito mi concentrerò sull'esposizione di parte del contenuto di questo lavoro, passando poi ad una panoramica su alcune delle direzioni prese in seguito dalle ricerche sull'argomento.

### 4.1. Il teorema di Talenti sulle equazioni ellittiche

Come nel lavoro di Weinberger [52], si considera il problema di Dirichlet su un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  per un operatore lineare uniformemente ellittico in forma di divergenza

$$\begin{cases} -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

con coefficienti  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega$$

(il minimo autovalore della matrice  $\{a_{ij}\}$  è normalizzato a 1), e termine noto  $f \in L^p(\Omega)$  con  $p > n/2$ . Consideriamo ora il problema "simmetrizzato":

$$\begin{cases} -\Delta v = f^\# & \text{in } \Omega^\# \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^\# \end{cases} \quad (7)$$

ossia: al dominio  $\Omega$  si sostituisce la sfera di ugual misura,  $\Omega^\#$ ; al termine noto  $f$  si sostituisce la sua simmetrizzata  $f^\#$ ; all'operatore ellittico a coefficienti variabili (con minimo autovalore  $\geq 1$ ) si sostituisce il laplaciano. Allora si prova che

$$u^\#(x) \leq v(x) \quad \forall x \in \Omega^\#. \quad (8)$$

Cioè: *la simmetrizzata del problema di partenza è maggiorata puntualmente dalla soluzione del problema simmetrizzato.*

Il risultato si può riformulare così, dal punto di vista variazionale: nella classe dei problemi di tipo (6) dove si fissi:

il minimo autovalore della matrice  $\{a_{ij}\}$ ;

la misura del dominio  $\Omega$ ;

la funzione di distribuzione del termine noto  $f$ ;

il problema che rende massima puntualmente la soluzione (nel senso della (8)) è quello a simmetria sferica.

Dalla stima puntuale si possono dedurre varie stime sulle norme, in particolare il risultato di Weinberger

$$|u(x)| \leq c\|f\|_p$$

con la miglior costante possibile.

Si può ottenere anche una stima sul gradiente, ma non ce ne occuperemo.

### Dimostrazione della (8)

Sia  $u$  soluzione di (6). Non è restrittivo supporre  $f \geq 0$  in  $\Omega$ ; se è così per il principio di massimo  $u \geq 0$  in  $\Omega$ . Supponiamo inoltre per semplicità che  $u$  sia abbastanza regolare.

Dato  $t > 0$ , integriamo ambo i membri dell'equazione differenziale sull'insieme di livello  $\{u > t\}$  (che è contenuto con compattezza in  $\Omega$ ). Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\{u>t\}} f(x) dx &= \int_{\{u>t\}} -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} dx = \\ &= \int_{\partial\{u>t\}} a_{ij}u_{x_i}\nu_j dH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

dove  $\nu_j$  è la normale entrante su  $\partial\{u > t\}$ . Supponiamo (come fatto nella dimostrazione del Teorema di Federer-Fleming-Rishel) che  $t$  non sia un valore critico per  $u$ ; allora

$$\int_{\partial\{u>t\}} a_{ij}u_{x_i}v_j dH_{n-1}(x) = \int_{\{u=t\}} a_{ij}u_{x_i}v_j dH_{n-1}(x) = \int_{\{u=t\}} a_{ij}u_{x_i} \frac{u_{x_j}}{|Du|} dH_{n-1}(x)$$

(Ricordare che nei punti in cui  $u = t$  e che non stanno su  $\partial\{u > t\}$ , è sicuramente  $|Du| = 0$ ; inoltre il gradiente è normale alle linee di livello quindi il versore normale si scrive così). Ora per l'ellitticità l'ultimo integrale è

$$\geq \int_{\{u=t\}} |Du| dH_{n-1}(x).$$

Abbiamo dunque ottenuto

$$\int_{\{u=t\}} |Du| dH_{n-1}(x) \leq \int_{\{u>t\}} f(x) dx. \quad (9)$$

Ora il primo membro si minora grazie alle (3), (5) del §3.3:

$$(nc_n^{1/n})^2 \frac{\mu_u(t)^{2-2/n}}{-\mu'_u(t)} \leq \int_{\{u=t\}} |Du| dH_{n-1}(x). \quad (10)$$

Ricordiamo che la (10) segue dalla disuguaglianza isoperimetrica più il teorema FFR, e diventa un'uguaglianza quando  $u$  ha simmetria sferica.

Il secondo membro della (9) invece si maggiora col Teorema di Hardy-Littlewood:

$$\int_{\{u>t\}} f(x) dx \leq \int_0^{\mu_u(t)} f^*(s) ds \quad (11)$$

(è un caso particolare di  $\int_E f(x) dx \leq \int_0^{|E|} f^*(s) ds$ ). Si noti che se  $f$  ed  $u$  coincidono con le loro simmetrizzate di Schwarz, anche nella (11) vale il segno di uguaglianza, in quanto in questo caso:

$$\int_{\{u^\#(x)>t\}} f^\#(x) dx = \int_{\{u^*(c_n|x|^n)>t\}} f^*(c_n|x|^n) dx =$$

(integrando in polari)

$$\begin{aligned} &= nc_n \int_{c_n \rho^n < \mu_u(t)} \rho^{n-1} f^*(c_n \rho^n) d\rho = [c_n \rho^n = s] \\ &= \int_0^{\mu_u(t)} f^*(s) ds. \end{aligned}$$

Grazie a (9), (10), (11), siamo arrivati quindi alla disuguaglianza

$$(nc_n^{1/n})^2 \frac{\mu_u(t)^{2-2/n}}{-\mu'_u(t)} \leq \int_0^{\mu_u(t)} f^*(s) ds$$

che riscriviamo nella forma

$$1 \leq (nc_n^{1/n})^{-2} \frac{[-\mu'_u(t)]}{\mu_u(t)^{2-2/n}} \int_0^{\mu_u(t)} f^*(s) ds \quad (12)$$

valida per q.o.  $t > 0$ .

La (12) è una disuguaglianza che coinvolge  $u$  ed  $f$  solo attraverso le loro funzioni di distribuzione, ottenuta a partire dall'ipotesi che  $u$  ed  $f$  soddisfino (6). Per come è stata ottenuta, la (12) è un'uguaglianza se  $u$  ed  $f$  coincidono con le proprie simmetrizzate di Schwarz.

Ora procediamo così: cambiando nome alla variabile nella (12), sostituiamo con  $t$  con  $\tau$  e integriamo tra 0 e  $t$  in  $d\tau$ :

$$t \leq \int_0^t (nc_n^{1/n})^{-2} \left\{ \frac{[-\mu'_u(\tau)]}{\mu_u(\tau)^{2-2/n}} \int_0^{\mu_u(\tau)} f^*(s) ds \right\} d\tau =$$

(col cambio di variabile  $\mu_u(\tau) = s$ ;  $\mu'_u(\tau)d\tau = ds$ ;  $s \in [\mu_u(0), \mu_u(t)]$ )

$$= \int_{\mu_u(t)}^{|\Omega|} (nc_n^{1/n})^{-2} \left\{ \frac{1}{s^{2-2/n}} \int_0^s f^*(\sigma) d\sigma \right\} ds. \quad (13)$$

Notare che se la (12) vale per q.o.  $t$ , la (13) vale per *ogni*  $t$  (è stata ottenuta integrando). Poniamo ora  $t = u^*(s)$  e supponiamo per semplicità che  $\mu_u(t) = s$  (ossia che  $u^*$  sia la funzione inversa di  $\mu_u$ , il che è generalmente vero, come osservato nel §2.2; questa ipotesi comunque si può rimuovere):

$$u^*(s) \leq \int_s^{|\Omega|} (nc_n^{1/n})^{-2} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2-2/n}} \int_0^\sigma f^*(\sigma') d\sigma' \right\} d\sigma$$

e infine

$$u^\#(x) \leq \int_{c_n|x|^n}^{|\Omega|} (nc_n^{1/n})^{-2} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2-2/n}} \int_0^\sigma f^*(\sigma') d\sigma' \right\} d\sigma \equiv v(x). \quad (14)$$

La funzione  $v(x)$  definita dal secondo membro dell'ultima formula è una funzione radiale, definita in  $\Omega^\#$  e nulla al bordo, di cui si calcola facilmente il laplaciano. Si verifica che

$$-\Delta v(x) = f^\#(x)$$

per cui  $v$  è proprio la soluzione del problema (7), e il teorema è dimostrato. (Oppure, senza calcolo diretto, si osserva che se  $u$  ed  $f$  sono simmetriche, e quindi  $u = u^\#$  è l'unica soluzione del problema (7), nelle disuguaglianze scritte vale il segno di uguale, per cui la  $v$  a secondo membro della (14) coincide con la  $v$  soluzione di (7)).

Questo dimostra la (8). □

Notiamo anche che

$$\max_{\Omega} |u(x)| = u^*(0) \leq \int_0^{|\Omega|} (nc_n^{1/n})^{-2} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2-2/n}} \int_0^\sigma f^*(\sigma') d\sigma' \right\} d\sigma.$$

Applicando all'ultimo membro la disuguaglianza di Hölder si ottiene una maggiorazione con  $c\|f\|_p$  (la disuguaglianza di Stampacchia). Una stima più accurata del secondo membro di questa uguaglianza fornisce anche la miglior costante possibile.



Vediamo la stima "grezza": applicando Hölder nell'interale più interno si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{|\Omega|} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2-2/n}} \int_0^\sigma f^*(\sigma') d\sigma' \right\} d\sigma &\leq \int_0^{|\Omega|} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2-2/n}} \sigma^{1/p'} \|f\|_p \right\} d\sigma = \\ &= \|f\|_p \frac{|\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\max_{\Omega} |u(x)| \leq (nc_n^{1/n})^{-2} \frac{|\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}} \|f\|_p \quad \text{purché } p > n/2.$$

Questa non è la stima ottimale. Quella ottimale ha costante:

$$c = |\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}} \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{n(n-2)\pi} \left\{ \frac{\Gamma(1+p')\Gamma((n/(n-2)) - p')}{\Gamma(n/(n-2))} \right\}^{1/p'}$$

## 4.2. Altre applicazioni delle tecniche di simmetrizzazione

Sulla base di quanto illustrato a proposito del teorema di Talenti sulle equazioni ellittiche, chiediamoci che tipo di problemi si può sperare di affrontare con queste stesse tecniche.

1. Se si vuole un risultato di stima puntuale di tipo (8), cioè  $u^\#(x) \leq v(x)$ , che sia interpretabile secondo la filosofia "nella tale classe di problemi quello che ha la soluzione puntualmente maggiore è il problema simmetrico", occorre studiare un problema per il quale la simmetrizzata della soluzione risolva un problema dello stesso tipo. Ma la simmetrizzata della soluzione è sempre nulla (o costante) al bordo della sfera, quindi:

*estensioni del risultato di Talenti che ne rispettino strettamente lo spirito devono riguardare necessariamente un problema di Dirichlet, con dato al bordo nullo.*

Sul problema di Dirichlet con dato al bordo non nullo, sembra che nulla si riesca a fare.

Su problemi diversi da quello di Dirichlet molto è stato fatto, ma in uno spirito leggermente diverso: ad esempio, si dimostra che *la simmetrizzata della soluzione di un problema di Neumann viene puntualmente maggiorata dalla soluzione di un problema di Dirichlet simmetrico*; questo fa sì che il "problema maggiorante" non sia un caso particolare della classe di problemi considerati, perciò non fornisce necessariamente la miglior costante possibile; tuttavia questo è il meglio che si riesca a fare.

2. Quando si "complica" l'equazione, permettendo che contenga termini di ordine inferiore, o nonlinearità, o degenerazioni nella parte principale, ecc., diventa non univoca la scelta della classe di problemi in cui ambientare la nostra ricerca: ad esempio, il laplaciano si può sempre vedere come caso particolare di queste equazioni, ma rispetto alla particolarità che si sta considerando (ad es.: presenza di termini di ordine inferiore) può essere un caso un po' troppo particolare: si vorrebbe confrontare la simmetrizzata del problema di partenza con la soluzione di un problema simmetrico che conservi però traccia di tutti gli ingredienti significativi dell'equazione di partenza. Quindi sono possibili risultati di simmetrizzazione diversi anche sulla medesima equazione di partenza.

3. La struttura di divergenza dell'equazione è irrinunciabile, come si vede dal fatto che la dimostrazione prende le mosse dall'integrare ambo i membri dell'equazione su un insieme di livello della soluzione, e poi applicare il teorema della divergenza.

La bibliografia sui risultati di "simmetrizzazioni e P.D.E." dimostrati a partire dal 1976 è terminata. Un buon survey abbastanza recente, con ricchissima bibliografia, è quello di Trombetti [51]. Quello che segue è un elenco di problemi-tipo diversi che sono stati trattati con tecniche di simmetrizzazione. Per ciascuno di questi problemi è stato indicato, salvo poche eccezioni, solo *il primo* lavoro (in ordine cronologico) che se ne è occupato. Per una bibliografia più estesa, si rimanda a [51].

Cominciamo dai risultati di *simmetrizzazione per problemi al contorno per equazioni a derivate parziali del second'ordine*. L'operatore che si considera è sempre in forma di divergenza; il dato al bordo è sempre zero; ciascuna delle seguenti ipotesi vale se non si dice il contrario: l'operatore è lineare, uniformemente ellittico, con solo parte principale, e il problema al contorno è di Dirichlet (o Cauchy-Dirichlet nel caso parabolico).

Problema di Cauchy-Dirichlet parabolico:

1976, Bandle [7]; 1986, Mossino-Rakotoson, [37]

Operatore parabolico non lineare:

1976, Bandle [8]; 1986, Alvino-Lions-Trombetti [3]

Operatore ellittico degenerare:

1978, Alvino-Trombetti [4]

Operatore ellittico con termini di ordine inferiore:

1979, Alvino-Trombetti [5]; 1985, Talenti [46]

Operatore ellittico non lineare:

1979, Talenti [44]

Problema di Neumann ellittico:

1979, Maderna-Salsa [33]

Problema di Neumann ellittico non lineare:

1979, Maderna-Salsa [34]

Problema misto Dirichlet-Neumann ellittico:

1985, Pacella-Tricarico [38]

Problemi ellittici di frontiera libera:

1985, Diaz [21]

Operatore parabolico degenerare non lineare:

1987, Transirico [50]

Problema d'ostacolo parabolico

1987, Diaz-Mossino [22]

Problema di Cauchy-Neumann parabolico:

1991, Bramanti [11]

Operatore ellittico degenerare non lineare:

1997, Betta [10]

Passando poi a problemi di tipo un po' diverso che sono stati affrontati con queste tecniche, sia nel campo delle equazioni a derivate parziali che in quello del calcolo delle variazioni, troviamo:

equazioni di Monge-Ampère:

1981, Talenti [45]

disequazioni variazionali:

1984, Bandle-Mossino [9]

equazioni di tipo Hamilton-Jacobi:

1984, Giarrusso-Nunziante [25]  
problemi di ottimizzazione in classi di funzioni con assegnato riordinamento:  
1987, Burton [13]  
costanti migliori nelle disuguaglianze di Sobolev per funzioni nulle su parte del bordo  
1988, Lions, Pacella, Tricarico [32]  
funzionali di calcolo delle variazioni:  
1990, Talenti [47]  
simmetrizzazione di Steiner e applicazioni:  
1996, Alvino, Trombetti, Diaz, Lions [6]  
simmetrizzazione convessa e applicazioni:  
1997, Alvino, Ferone, Trombetti, Lions [2]

Infine, per citare a puro titolo di esempio alcuni *sviluppi recenti* di questi studi abbiamo:

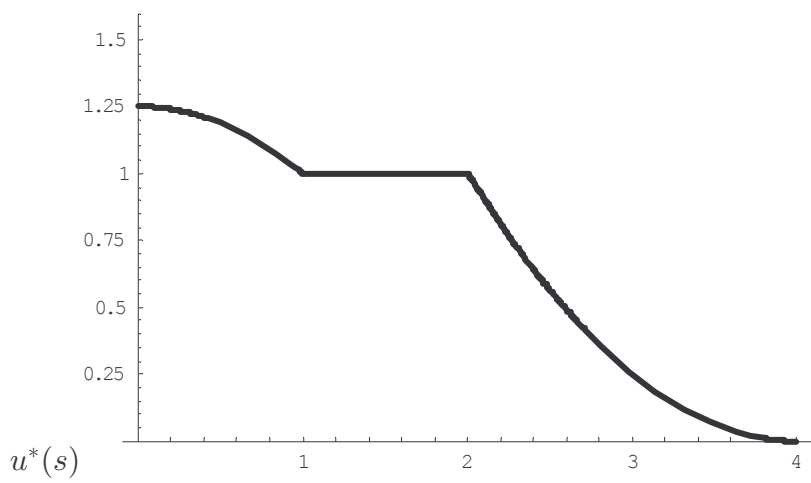
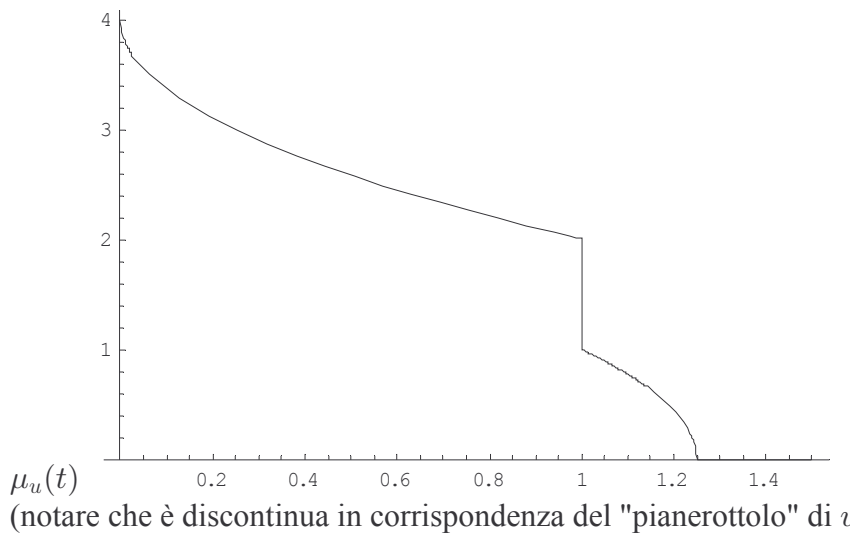
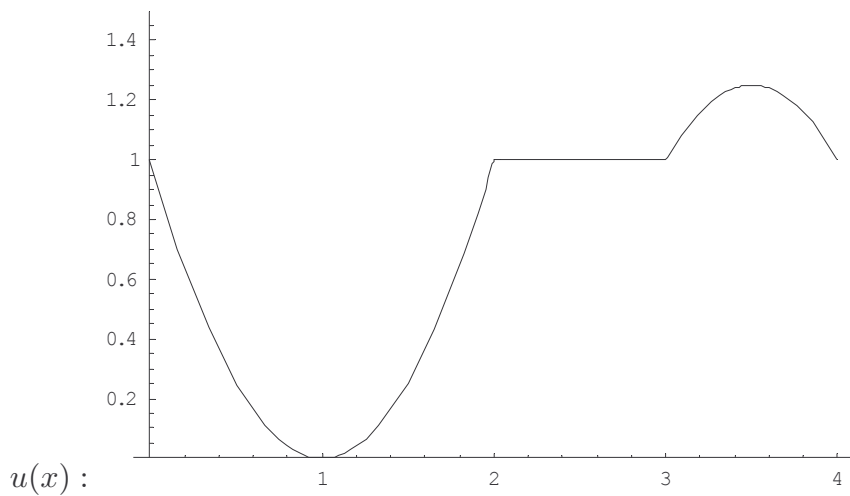
studio dei riarrangiamenti in gruppi di Carnot ed estensione a questo contesto del Teorema di Pólya-Szegő:

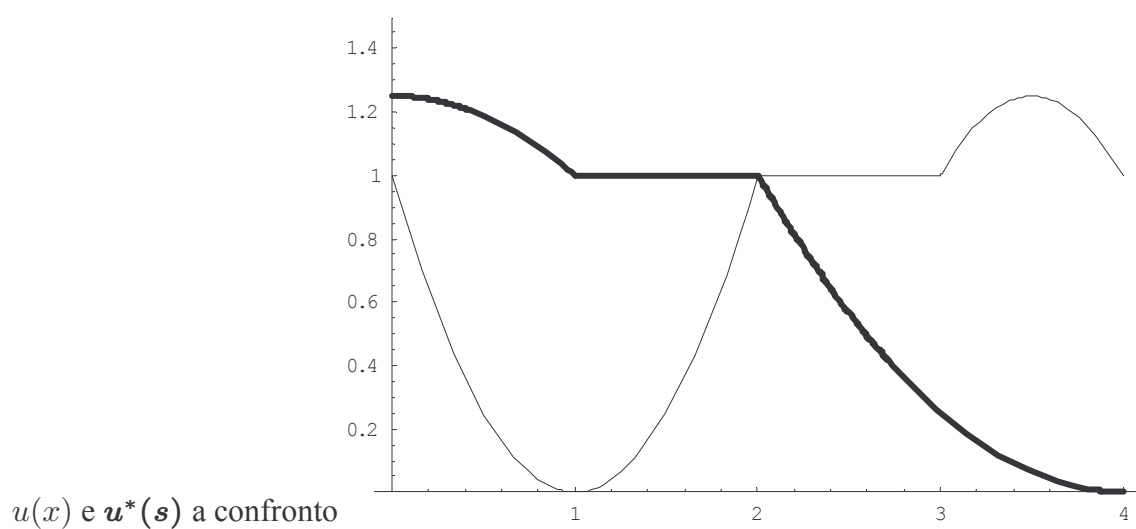
2000, Manfredi-Vera De Serio [35]  
nuovi sviluppi sui problemi isoperimetrici classici della fisica matematica:  
2001, Carroll [15]  
2002, Crasta-Fragalà-Gazzola [18]  
studio dell'azione dei riarrangiamenti sulla classe BV:  
2002, Cianchi-Fusco [17]  
applicazioni alla finanza matematica:  
2003, Laurence-Stredulinsky [31]

Queste citazioni non vogliono essere esaurienti né dei lavori sull'argomento, né degli autori che se ne sono occupati, né dei filoni di indagine; hanno il solo scopo di illustrare quanto siano state finora varie le applicazioni di queste tecniche.

**A. Riarrangiamenti di Hardy-Littlewood:**

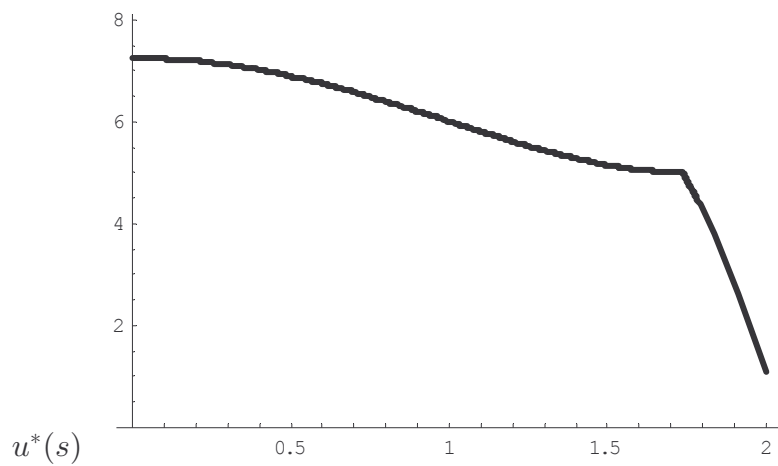
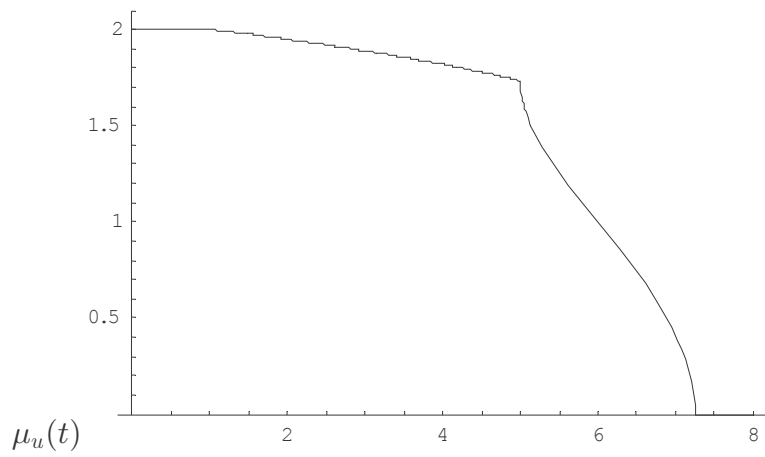
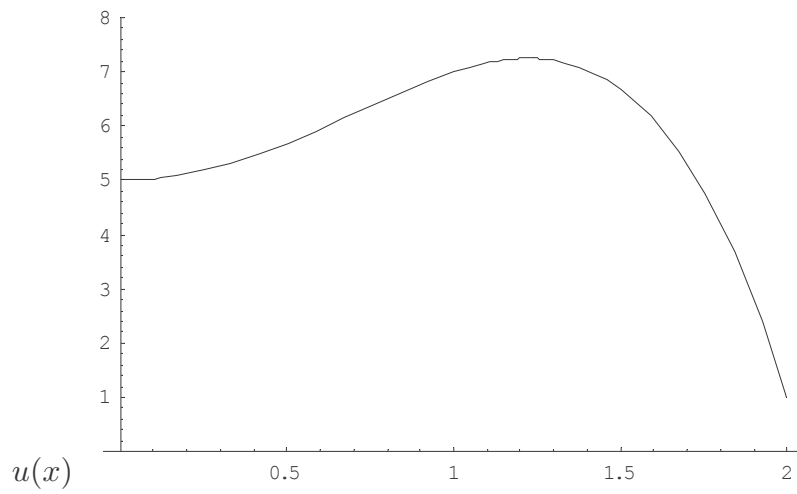
esempio di una funzione di una variabile  $u$ , la sua funzione di distribuzione  $\mu_u$  e la sua riarrangiata  $u^*$





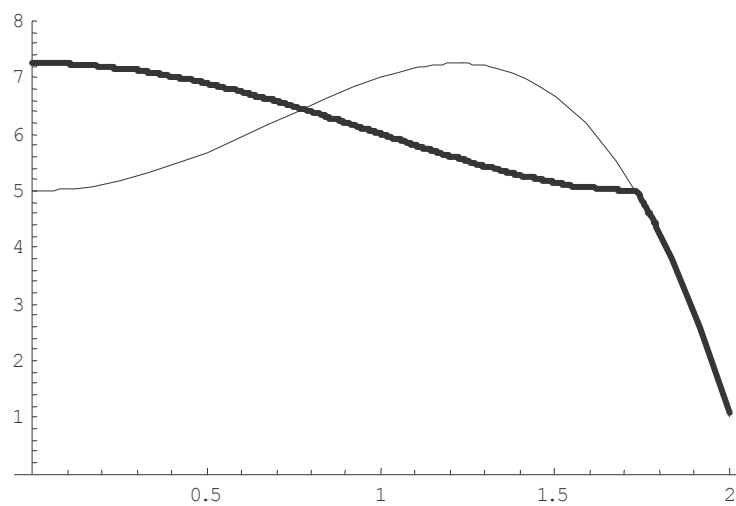
**B. Riarrangiamenti di Hardy-Littlewood:**

un altro esempio di una funzione di una variabile  $u$ , la sua funzione di distribuzione  $\mu_u$  e la sua riarrangiata  $u^*$



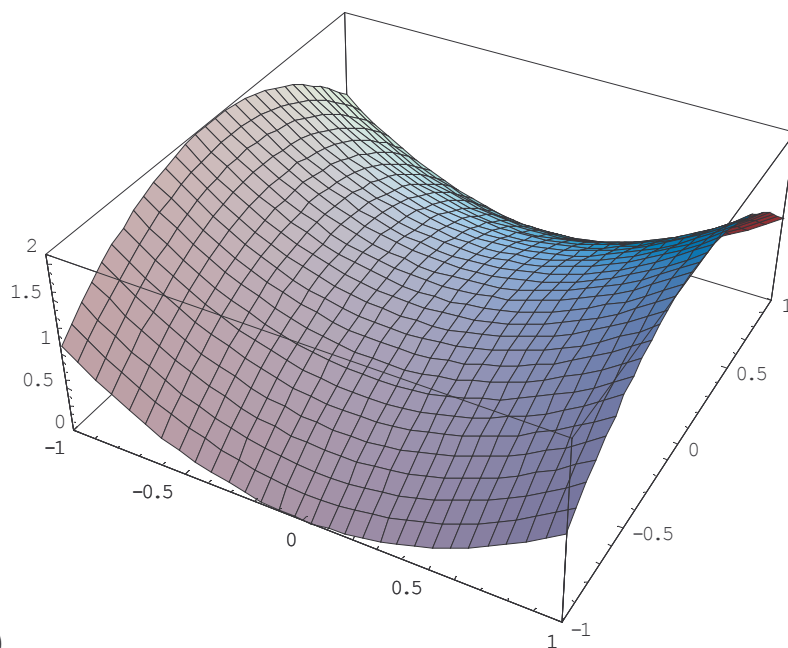
Notare che anche se  $u$  è regolare (polinomio!),  $u^*(s)$  è solo lipschitziana

$u(x)$  e  $u^*(s)$  a confronto

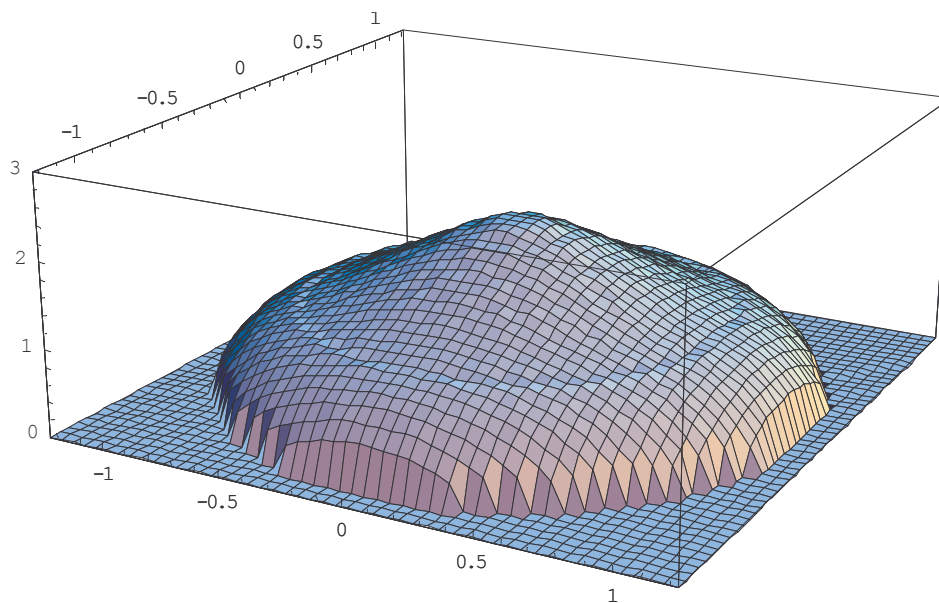


### C. Simmetrizzazione di Schwarz di una funzione:

Esempio di una funzione di 2 variabili e la sua simmetrizzata di Schwarz



$u(x, y)$



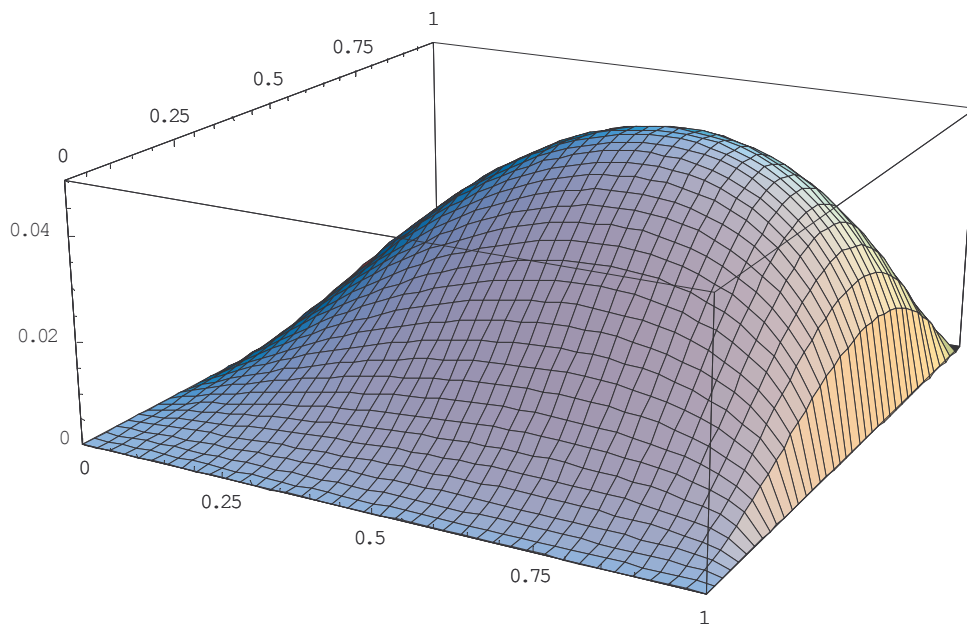
$u^\#(x, y)$

Notare che  $u$  non si annulla al bordo del quadrato, quindi non vale il teorema di Pólya-Szegő; il grafico di  $u^\#$  appare "verticale" vicino al bordo del cerchio: il gradiente di  $u^\#$  potrebbe non essere integrabile.

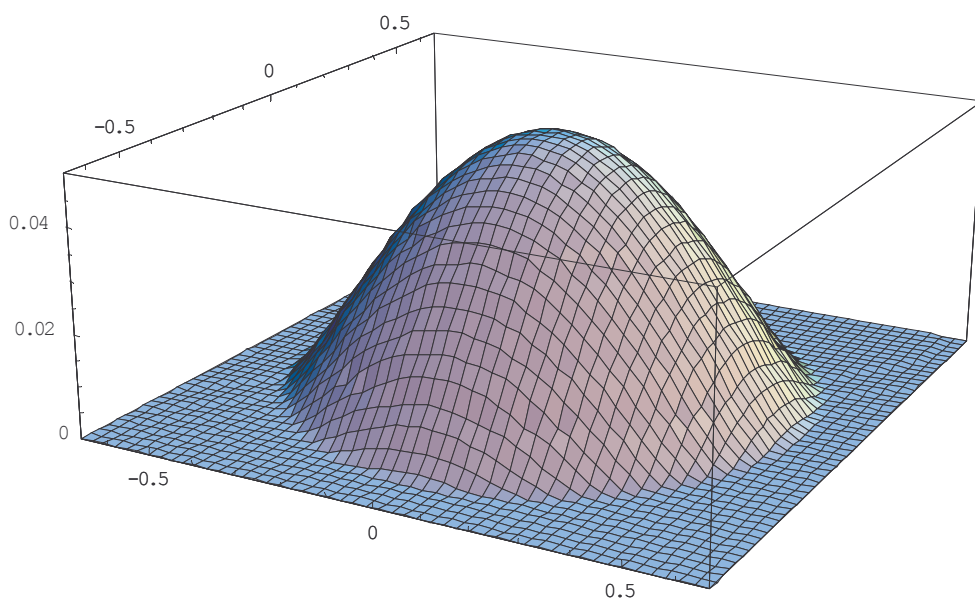


### D. Simmetrizzazione di Schwarz di una funzione:

Un altro esempio di una funzione di 2 variabili e la sua simmetrizzata di Schwarz



$u(x, y)$

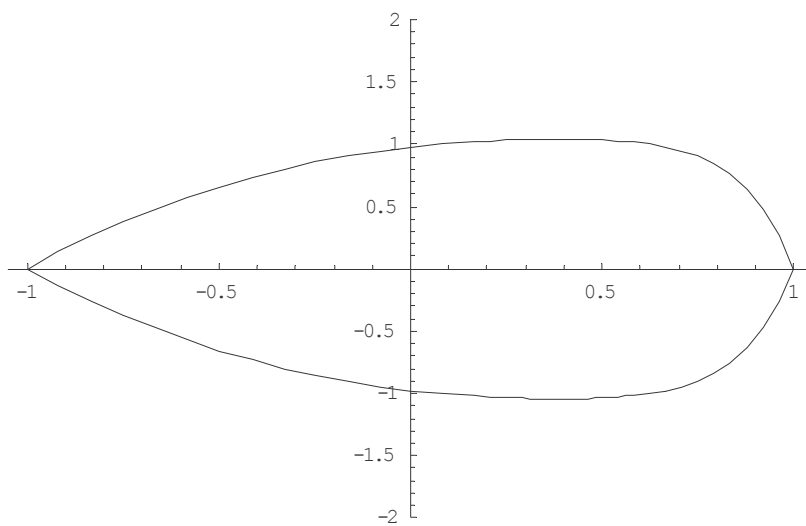
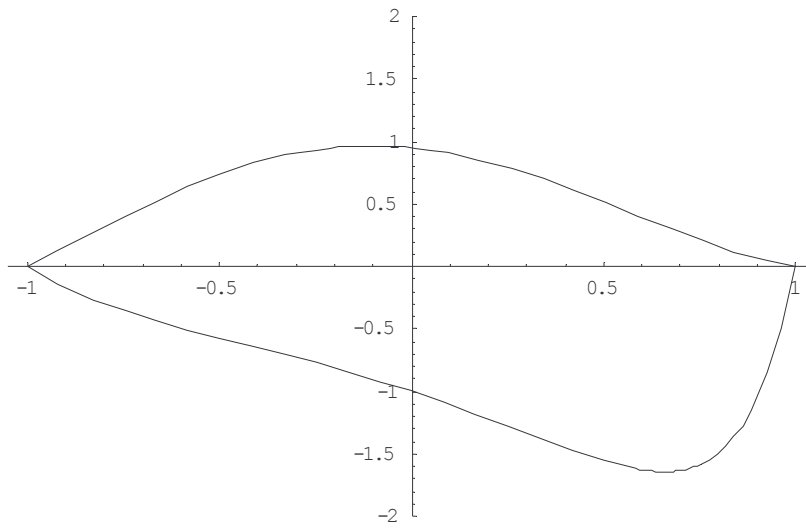


$u^\#(x, y)$

Notare che  $u$  è regolare e si annulla al bordo del quadrato; per il teorema di Pólya-Szegő,  $u^\#$  ha gradiente integrabile: notare che al bordo del cerchio  $u^\#$  si annulla con gradiente finito.

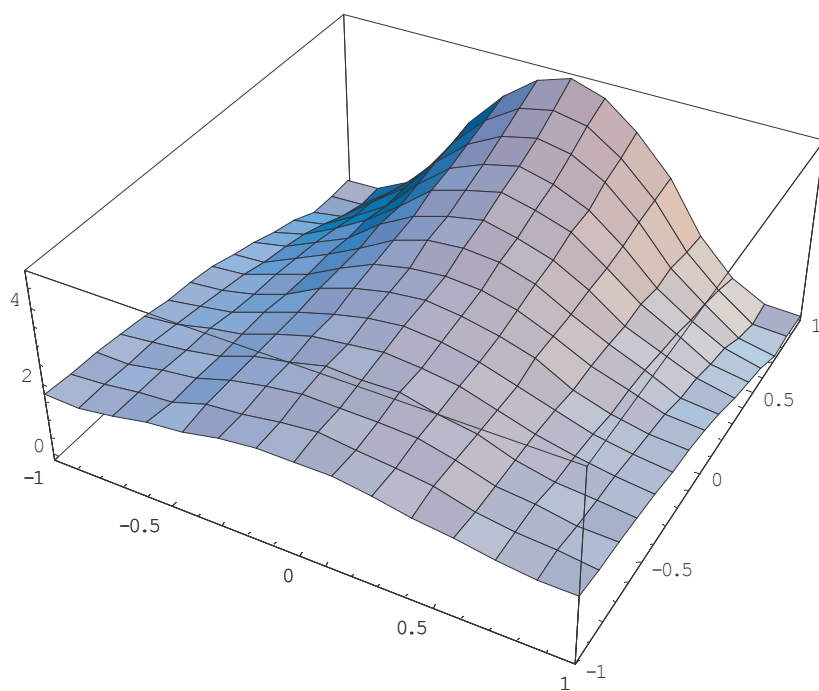
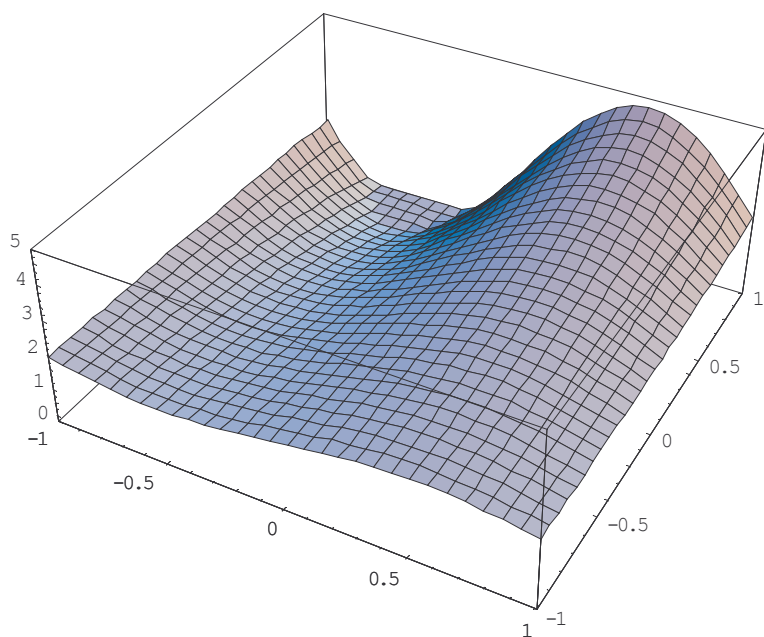
**E. Simmetrizzazione di Steiner di insiemi:**

esempio di un insieme del piano e il suo simmetrizzato di Steiner rispetto all'asse  $x$

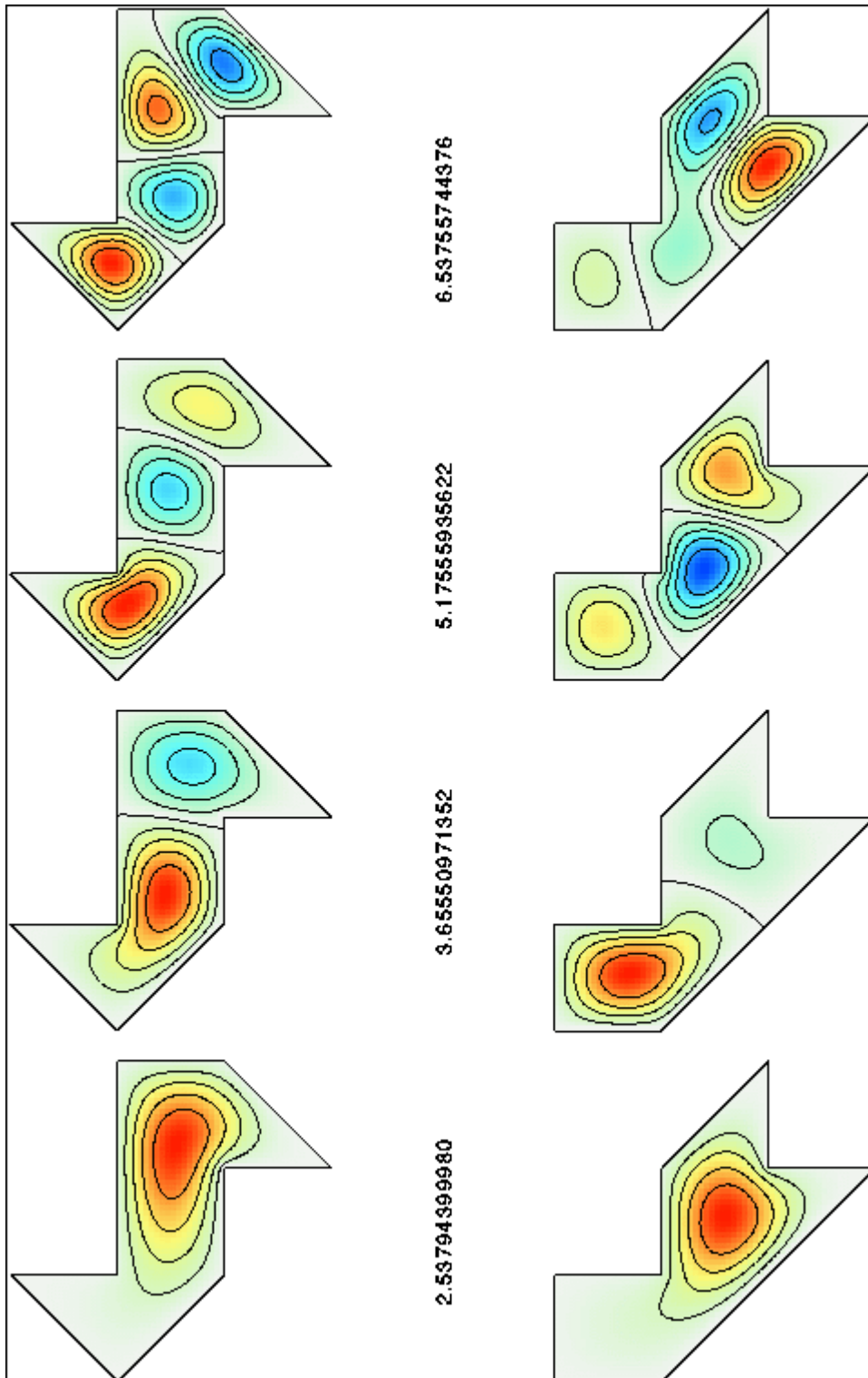


**F. Simmetrizzazione di Steiner di funzioni:**

esempio di una funzione di due variabili e la sua simmetrizzata di Steiner



**G. "You cannot hear the shape of a drum": esempio di 2 tamburi di forma diversa ma uguale spettro.** Nelle figure, il numero è l'autovalore, le linee tracciate sono le linee nodali delle vibrazioni relative. Si noti che i 2 tamburi hanno la stessa area e perimetro.



## Bibliografia

- [1] **F. J. Almgren, E. H. Lieb:** The (non) continuity of symmetric decreasing rearrangement. *Symposia Mathematica*, Vol. XXX (Cortona, 1988), 89-102, *Sympos. Math.*, XXX, Academic Press, London, 1989.
- [2] **A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti, P.-L. Lions:** Convex symmetrization and applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 14 (1997), no. 2, 275-293.
- [3] **A. Alvino, P.-L. Lions, G. Trombetti:** Comparaison des solutions d'équations paraboliques et elliptiques par symétrisation. Une méthode nouvelle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 303 (1986), no. 20, 975-978.
- [4] **A. Alvino, G. Trombetti:** The best majorization constants for a class of degenerate elliptic equations. (Italian) *Ricerche Mat.* 27 (1978), no. 2, 413-428.
- [5] **A. Alvino, G. Trombetti:** Elliptic equations with lower-order terms and reordering. (Italian) *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 66 (1979), no. 3, 194-200.
- [6] **A. Alvino, G. Trombetti, J. I. Diaz, P.-L. Lions:** Elliptic equations and Steiner symmetrization. *Comm. Pure Appl. Math.* 49 (1996), no. 3, 217-236.
- [7] **C. Bandle:** On symmetrizations in parabolic equations. *J. Analyse Math.* 30 (1976), 98-112.
- [8] **C. Bandle:** Isoperimetric inequalities for a class of nonlinear parabolic equations. *Z. Angew. Math. Phys.* 27 (1976), no. 3, 377-384.
- [9] **C. Bandle, J. Mossino:** Rearrangement in variational inequalities. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 138 (1984), 1-14.
- [10] **M. F. Betta:** Estimates for solutions of nonlinear degenerate elliptic equations. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 45 (1997), no. 2, 449-470.
- [11] **M. Bramanti:** Symmetrization in parabolic Neumann problems. *Appl. Anal.* 40 (1991), no. 1, 21-39.
- [12] **M. Bramanti:** On the gradient of Schwarz symmetrization of functions in Sobolev spaces. *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) 7 (1993), no. 2, 413-430.
- [13] **G. R. Burton:** Rearrangements of functions, maximization of convex functionals, and vortex rings. *Math. Ann.* 276 (1987), no. 2, 225-253.
- [14] **R. Caccioppoli:** Misura e integrazione sulle varietà parametriche. I e II. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) 12, (1952). 137-146; 219-227.
- [15] **T. Carroll:** Old and new on the bass note, the torsion function and the hyperbolic metric. *Irish Math. Soc. Bull.* No. 47 (2001), 41-65.

- [16] **G. Chiti:** Rearrangements of functions and convergence in Orlicz spaces. *Applicable Anal.* 9 (1979), no. 1, 23-27.
- [17] **A. Cianchi, N. Fusco:** Functions of bounded variation and rearrangements. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 165 (2002), no. 1, 1-40.
- [18] **G. Crasta, I. Fragalà, F. Gazzola:** A sharp upper bound for the torsional rigidity of rods by means of web functions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 164 (2002), no. 3, 189-211.
- [19] **E. De Giorgi:** Su una teoria generale della misura  $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad  $r$  dimensioni. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 36, (1954). 191-213.
- [20] **E. De Giorgi:** Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita. *Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I* (8) 5 1958 33-44.
- [21] **J. I. Díaz:** Applications of symmetric rearrangement to certain nonlinear elliptic equations with a free boundary. *Nonlinear differential equations* (Granada, 1984), 155-181, *Res. Notes in Math.*, 132, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [22] **J. I. Diaz, J. Mossino:** Inégalité isopérimétrique dans un problème d'obstacle parabolique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305 (1987), no. 17, 737-740.
- [23] **H. Federer:** Curvature measure, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93 (1959).
- [24] **W. Fleming, R. Rishel:** An integral formula for the total gradient variation, *Arch. Math.*, 11 (1960).
- [25] **E. Giarrusso, D. Nunziante:** Symmetrization in a class of first-order Hamilton-Jacobi equations. *Nonlinear Anal.* 8 (1984), no. 4, 289-299.
- [26] **C. Gordon, D. L. Webb, S. Wolpert:** One can not hear the shape of a drum, *Bulletin of the Amer. Math. Society*, Vol 27, N 1, July 1992, pp. 134-138.
- [27] **Hardy-Littlewood:** *Inequalities*. 1<sup>^</sup> ediz.: Cambridge 1934
- [28] **Hardy-Littlewood-Pólya:** *Inequalities*. 2<sup>^</sup> ediz.: Cambridge 1952.
- [29] **M. Kac:** Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* 73 1966 no. 4, part II, 1-23.
- [30] **B. Kawohl:** Rearrangements and convexity of level sets in PDE. *Lecture Notes in Mathematics*, 1150. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [31] **P. Laurence, E. Stredulinsky:** A comparison principle for an American option on several assets: Index and spread options, *Electronic Journal of Differential Equations* - <http://ejde.math.txstate.edu>; Vol. 2003(2003), No. 74, pp. 1-26.
- [32] **P.-L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico:** Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions. *Indiana Univ. Math. J.* 37 (1988), no. 2, 301-324.

- [33] **C. Maderna, S. Salsa:** Symmetrization in Neumann problems. *Applicable Anal.* 9 (1979), no. 4, 247-256.
- [34] **C. Maderna, S. Salsa:** A priori bounds in nonlinear Neumann problems. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5) 16* (1979), no. 3, 1144-1153.
- [35] **Manfredi-Vera De Serio:** Rearrangements in Carnot groups, preprint 2000 scaricabile a:  
[http://www.pitt.edu/~manfredi/papers/VirginiaFeb\\_2001.pdf](http://www.pitt.edu/~manfredi/papers/VirginiaFeb_2001.pdf)
- [36] **V. G. Maz'ja:** Weak solutions of the Dirichlet and Neumann problems. (Russian) *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* 20 1969 137-172.
- [37] **J. Mossino, J.-M. Rakotoson:** Isoperimetric inequalities in parabolic equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 13* (1986), no. 1, 51-73.
- [38] **F. Pacella, M. Tricarico:** Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 34 (1985/86), no. 1, 75-93.
- [39] **G. Pólya, G. Szegő:** Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. *Annals of Mathematics Studies*, no. 27, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.
- [40] **M. Ritoré, A. Rios:** Recent advances in isoperimetric problems,  
<http://www.ugr.es/~surfaces/int.pdf>
- [41] **A. Siegel:** A historical review of the isoperimetric theorem in 2-D, and its place in elementary plane geometry. <http://www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf>
- [42] **G. Talenti:** Elliptic equations and rearrangements. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3* (1976), no. 4, 697-718.
- [43] **G. Talenti:** Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110* (1976), 353-372.
- [44] **G. Talenti:** Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 120* (1979), 160-184.
- [45] **G. Talenti:** Some estimates of solutions to Monge-Ampère type equations in dimension two. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 8* (1981), no. 2, 183--230.
- [46] **G. Talenti:** Linear elliptic p.d.e.'s: level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions. *Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 4* (1985), no. 3, 917-949.
- [47] **G. Talenti:** Boundedness of minimizers, *Hokkaido Math. J.* 19, no.2, 1990.
- [48] **G. Talenti:** The standard isoperimetric theorem. *Handbook of convex geometry*, Vol. A, B, 73-123, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [49] **G. Talenti:** On isoperimetric theorems of mathematical physics. *Handbook of convex geometry*, Vol. A, B, 1131-1147, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [50] **M. Transirico:** Symmetrization in a nonlinear degenerate parabolic problem. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 149* (1987), 329-346.

- [51] **G. Trombetti**: Metodi di simmetrizzazioni nelle equazioni alle derivate parziali. B.U.M.I. (8) 3-B (2000), 601-634.
- [52] **H. F. Weinberger**: Symmetrization in uniformly elliptic problems. 1962 Studies in mathematical analysis and related topics pp. 424-428. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif.

Marco Bramanti  
Dipartimento di Matematica  
Politecnico di Milano  
Via Bonardi 9  
20133 Milano

e-mail: [marbra@mate.polimi.it](mailto:marbra@mate.polimi.it)  
<http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/>