ilsussidiario.net VERSIONE BETA il quotidiano approfondito

CULTURA

ALESSIO FIGALLI/ La matematica italiana capace di portare stupore e clamore

Marco Bramanti

venerdì 3 agosto 2018

La notizia è stata riportata dai quotidiani e notiziari: il matematico italiano Alessio Figalli, 34 anni, il 1° agosto, al Congresso dell'International Mathematical Union che si sta tenendo a Rio de Janeiro, ha ricevuto la Medaglia Fields, massimo riconoscimento internazionale per la ricerca matematica, assegnata ogni 4 anni a 2-4 matematici che abbiano portato straordinari contributi e non abbiano ancora compiuto 40 anni. Prima di lui solo un altro italiano, Enrico Bombieri, nel 1974, aveva ricevuto questo premio prestigioso.

Figalli è nato a Roma, ha studiato alla Scuola Normale Superiore di Pisa, conseguendo il dottorato in matematica nel 2007. Dopo aver ricoperto varie posizioni prima in Francia e poi all'Università del Texas di Austin, dal 2016 è all'ETH, il prestigioso Politecnico di Zurigo (full professor).

La motivazione sintetica del premio è *"Per i contributi alla teoria del trasporto ottimo e le sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, la geometria metrica e la probabilità"*. È sempre difficile spiegare ai non addetti ai lavori il senso di una ricerca matematica. La stessa IMU che assegna il premio ne è consapevole e pubblica, accanto alla motivazione estesa del premio, scritta nel linguaggio tecnico e formale, una versione più ampia e di livello divulgativo, che nel caso di Figalli è stata scritta da Allyn Jackson (scrittrice scientifica specializzata in matematica) e si può trovare qui. Ciò che segue è una mia sintesi e adattamento di quel testo, che cerca di rispondere alla giusta curiosità di chi si chiede *per che cosa* quel premio è stato vinto.

Presentiamo una breve introduzione al concetto di *controllo ottimo*, seguito da descrizioni di tre problemi che esemplificano la gamma e il virtuosismo del lavoro di Figalli. Immaginiamo 10 libri allineati su uno scaffale. Un modo ottimale di spostare l'intero insieme di libri di una posizione a destra è spostare il 10° libro di un posto a destra, poi il 9° libro, ecc., infine spostare il 1° libro di un posto a destra. Questo metodo "costa" 10 mosse. C'è un'altra soluzione ottimale, pure di costo 10: prendere il 1° libro e spostarlo di 10 posti a destra. Ciascuna di queste soluzioni è una *mappa di trasporto ottimo*.

La prima analisi rigorosa di questo tipo di problema fu fatta circa 250 anni fa dal matematico francese Gaspard Monge, che analizzò come minimizzare il costo del trasporto di materiali da costruzione dalla loro fonte al sito di costruzione. Negli anni 1940, l'economista e matematico Leonid Kantorovich diede nuova vita a questo argomento usando gli strumenti dell'analisi matematica del XX secolo. Considerò situazioni più complesse, come un insieme di diversi panifici che forniscono merce a diversi bar. In questo caso una mappa di trasporto ottimo connette i panifici con i bar minimizzando il costo totale del trasporto delle merci. Nel 1975 Kantorovic ricevette il Nobel per l'economia per il suo lavoro.

Negli anni 1980 i matematici fecero importanti progressi nel trasporto ottimo, che portarono a un'esplosione di nuove applicazioni ad aree come la pianificazione urbana, l'idrodinamica, l'elaborazione delle immagini, ma stimolarono anche l'uso del trasporto ottimo come strumento teorico per dimostrare risultati in altre discipline matematiche. Un esempio notevole di quest'ultimo fatto è il lavoro di Figalli, Francesco Maggi e Aldo Pratelli sui cosiddetti *problemi isoperimetrici*. Il problema isoperimetrico classico può essere enunciato così: fissata la lunghezza di una recinzione, quale forma racchiude la massima area di terreno? Si può dimostrare che la forma ottimale è una circonferenza. Le bolle di sapone forniscono un altro esempio di fenomeno isoperimetrico: mentre racchiude una quantità d'aria fissata, una bolla minimizza la tensione superficiale della pellicola di sapone. Anche i cristalli assumono una forma che minimizza l'energia. Queste proprietà delle bolle e dei cristalli sono molto idealizzate e non tengono conto di altre forze che potrebbero essere all'opera. Per esempio, come si deforma un cristallo quando viene riscaldato?

Figalli e i suoi collaboratori hanno affrontato questo problema inquadrandolo come problema di trasporto ottimo. Applicando una quantità E di energia, la forma idealizzata del cristallo è "trasportata" a una nuova forma. Assumendo come costo il quadrato della distanza di cui i punti del cristallo devono spostarsi, Figalli e collaboratori hanno raggiunto il risultato sorprendentemente semplice che, in media, ogni punto si sposta di una distanza pari alla radice quadrata di E. Questo è un profondo risultato teorico, in quanto stabilisce la *stabilità* della soluzione, nel senso che se l'energia fornita rimane moderata, lo stesso sarà per la deformazione.

Un secondo esempio del lavoro di Figalli e collaboratori consiste in profondi risultati teorici riguardanti un sistema di equazioni note come *equazioni semi-geostrofiche*. Proposte dai meteorologi negli anni 1990, queste equazioni modellizzano i flussi su larga scala nell'atmosfera e negli oceani. Ma sono equazioni difficili da studiare: in queste situazioni è possibile che non esista alcuna soluzione, o che ce ne siano molte ma non si sappia dire quale soluzione rappresenti il fenomeno fisico effettivo. Il computer è di scarso aiuto, in quanto le necessarie approssimazioni potrebbero finire col fornire soluzioni scorrette. Occorrono invece una robusta comprensione teorica del sistema di equazioni e risultati rigorosi di esistenza e unicità delle soluzioni.

Figalli e i suoi coautori hanno considerato un'altra equazione, detta equazione di Monge-Ampère, già studiata estesamente in matematica. Nel contesto semi-geostrofico, l'equazione di Monge-Ampère esprime il trasporto ottimo di una densità in un'altra, mentre il "costo" è il quadrato della distanza percorsa. Le densità potrebbero essere goccioline d'acqua o particelle in una nuvola, e queste si muovono in un modo ottimo. Data una certa densità, una soluzione dell'equazione di Monge-Ampère fornisce una mappa di trasporto ottimo. Ma tutti i risultati noti sull'equazione di Monge-Ampère negli ultimi 50 anni non offrivano un modo chiaro per connettere il trasporto ottimo al contesto semi-geostrofico. Ecco perché il lavoro di Figalli e Guido De Philippis ha fatto tanto scalpore. Essi hanno prodotto un clamoroso avanzamento nella comprensione della struttura delle soluzioni dell'equazione di Monge-Ampère che fornisce esattamente ciò che era necessario per permettere di applicare la teoria del trasporto ottimo alle equazioni semi-geostrofiche. Il loro lavoro combina in modo equilibrato finezza tecnica e intuito creativo. Dopo di che, De Philippis e Figalli, insieme a Luigi Ambrosio e Maria Colombo, hanno attaccato direttamente le equazioni geostrofiche e fornito essenzialmente una soluzione completa nei domini convessi tridimensionali.

L'esempio finale del lavoro di Figalli è nell'area dei *problemi di frontiera libera*. Consideriamo un blocco di ghiaccio immerso in acqua, che si sta sciogliendo. Dentro il blocco c'è una regione a temperatura di 0 gradi, e fuori dal blocco c'è una regione a temperatura maggiore di 0 gradi. Qual è la forma del bordo (detto "frontiera libera") che separa queste due regioni? I matematici studiano questi problemi in contesti astratti e in dimensione qualsiasi. Intuitivamente ci si aspetta che la frontiera libera sia regolare, ma dimostrare questo è decisamente difficile. In linea di principio, la frontiera libera potrebbe essere un insieme molto irregolare, perfino frattale nella forma, o potrebbe possedere singolarità, cioè vertici, spigoli o autointersezioni.

Prima degli anni 1970, si sapeva molto poco riguardo alla regolarità delle frontiere libere, perfino nei casi più semplici. Un progresso fondamentale venne nel 1977, quando Luis Caffarelli dimostrò che la frontiera libera è regolare al di fuori di un certo insieme di punti singolari e diede anche una descrizione geometrica abbastanza precisa della forma dell'insieme dei punti singolari. Nei 40 anni successivi, risultati definitivi furono ottenuti solo nel caso di oggetti bidimensionali. Per questo motivo, un grande clamore accolse il lavoro di Figalli e Joaquim Serra, che nel 2017 diedero una descrizione completa e definitiva della frontiera libera. In particolare, essi mostrarono che nel caso tridimensionale la frontiera libera è molto regolare, a eccezione di alcune singolarità isolate. E in ogni dimensione, essi provarono un risultato preciso sulla natura delle singolarità nella frontiera libera. I nuovi metodi introdotti in questo lavoro stanno avendo un ampio impatto.

Termino queste note con un'osservazione sulla "scuola" in cui questi risultati si inseriscono. Se i risultati di Figalli rappresentano una punta di eccellenza, questo non significa che egli sia un "punto isolato" nel panorama matematico italiano. Tra i suoi tanti collaboratori scientifici, diversi tra coloro con cui ha condiviso molti lavori sono altri italiani, ricercatori di alto livello, dal suo advisor alla Normale di Pisa, Luigi Ambrosio, che a sua volta fu allievo di Ennio De Giorgi (1928-1996), grande caposcuola alla Normale, a Francesco Maggi (Univ. del Texas, Austin), Guido De Philippis (S.I.S.S.A., Trieste) e Maria Colombo (E.P.F.L., Losanna). Un altro esponente della "scuola pisana", Camillo De Lellis, da luglio 2018 è al prestigioso Institute for Advanced Studies di Princeton. Sono solo alcuni esempi attuali del fatto che il sistema accademico italiano produce matematici di grande qualità.