L'INSEGNANTE ALLE PRESE CON LA PROPRIA MATERIA: IL CASO DELLA MATEMATICA

MARCO BRAMANTI

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Abstract. Per un insegnante, che tipo di lavoro critico personale sulla propria disciplina è utile, anche dopo la laurea, per la propria formazione, per la costruzione di sé come insegnante? Quali sono i criteri che si possono utilizzare per mettere a punto i propri percorsi didattici, scegliere il taglio e lo stile di insegnamento da seguire?

Affrontiamo questo tema con specifico riferimento alla matematica, avendo in mente soprattutto la secondaria di secondo grado, ma facendo affermazioni sufficientemente generali da poter, si spera, suggerire qualcosa di pertinente anche all'insegnamento alle età più giovani.

Nota: Questo scritto contiene il testo preparato per l'intervento al convegno, e mantiene lo stile sintetico del testo parlato, che procede per spunti, senza pretese di sistematicità. Ho inserito note e riferimenti bibliografici per dare modo a chi è interessato di approfondire o quanto meno di trovare argomentazioni per certe affermazioni che altrimenti potrebbero risultare arbitrarie. In carattere più piccolo ho inserito alcune esemplificazioni su specifici argomenti matematici scolastici, che nella conferenza non trovavano spazio.

Premessa. Cosa vogliamo insegnare?

Vorrei iniziare con una citazione di uno studioso straniero sul tema della formazione degli insegnanti di matematica (sveleremo poi chi è l'autore).

> "In anni recenti, un interesse crescente è sorto tra i docenti universitari di matematica e scienze naturali riguardo alla formazione degli insegnanti di scuola superiore. Questo è un fenomeno piuttosto nuovo. Per molto tempo, in precedenza, i docenti universitari si erano preoccupati esclusivamente delle loro scienze, senza dare un pensiero ai bisogni delle scuole, senza neppure preoccuparsi di stabilire una connessione con la matematica scolastica. Qual era il risultato di questa pratica? Il giovane studente

> universitario si trovava, dall'inizio dell'università, a confrontarsi con problemi che non suggerivano in alcun modo le cose di cui si sarebbe dovuto occupare a scuola. (…) Quando, alla fine del suo corso di studi, diventava un insegnante, improvvisamente si trovava tenuto a insegnare la matematica elementare tradizionale nel vecchio modo pedante; e poiché era scarsamente capace, e privo di aiuti, nel discernere alcuna connessione tra questo compito e la sua matematica universitaria, ricadeva presto in quell'antico modo di insegnare, e i suoi studi universitari rimanevano solo un ricordo più o meno piacevole che non aveva alcuna influenza sul suo insegnamento. C'è oggi un movimento volto ad abolire questa doppia discontinuità, che non aiuta né la scuola né l'università."

Queste parole sono state scritte dal matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) nell'introduzione del suo famoso testo "Matematica elementare dal punto di vista superiore", a Gottingen, nel Giugno del 1908!

È più di un secolo che noi matematici ci facciamo l'esame di coscienza sulla formazione degli insegnanti di scuola. Allora possiamo dire che siamo bravi, che è tutto risolto? Non direi, diciamo che c'è ancora tanto da migliorare…

Iniziamo chiedendoci cosa vogliamo, o dobbiamo, insegnare. Credo che ogni insegnante desideri:

- insegnare una disciplina (e quindi come quella disciplina ci introduca alla realtà), cercando di trasmettere certi *contenuti e metodi* specifici di quella disciplina, ma anche…

- trasmettere certe *idee generali su cos'è* quella disciplina, che è una cosa un po' diversa dal punto precedente: si può parlare tanto *di* matematica senza mai parlare *della* matematica. E' importante, cioè, dare, anche (e forse soprattutto) a chi nel seguito degli studi studierà tutt'altro, qualche idea di cos'è e come si colloca quella disciplina nel quadro generale della cultura.

- trasmettere *la passione* per una disciplina;

- insegnare *un certo uso della ragione*.

Nel seguito cercherò in qualche modo di toccare questi vari aspetti, procedendo per spunti, in modo non sistematico, visto lo spazio limitato.

Coscienza del valore di ciò che si insegna. Qualche caratteristica generale della matematica

Chiediamoci, per cominciare: nella formazione iniziale di un insegnante (ad es., per un insegnante di matematica, il corso di studi in matematica), quanto tempo e spazio di riflessione si è dato a una riflessione sulla matematica in quanto tale? Temo che ci si possa laureare in matematica senza aver mai ascoltato un'ora di lezione su cos'è la matematica.

Quindi, iniziamo da questo: un lavoro di formazione di sé come insegnante di matematica non può prescindere da un lavoro critico, personale, di approfondimento e sintesi di quali siano le caratteristiche essenziali della matematica che la rendono interessante, quindi da trasmettere. In un certo senso, occorre *appropriarsi della coscienza del valore di ciò che si insegna*.

Ma “aver coscienza del valore di ciò che si insegna” significa avere sia una stima della disciplina in senso generale, per le sue caratteristiche di fondo, sia una stima per gli specifici contenuti oggetto dell’insegnamento: chi pensa “la mia materia è bella, ma con queste quattro cose che si insegnano a scuola cosa vuoi fare...” non può trasmettere passione. Chi pensa così non è un appassionato della sua materia, è al più un nostalgico della sua materia.

Occorre quindi che il docente faccia anche un lavoro sugli specifici macro-argomenti oggetto dell’insegnamento (algebra, geometria analitica, analisi…), non semplicemente lo studio dei contenuti (ovvio che questo sia indispensabile!), ma una riflessione per essere consapevole di come in quelle discipline si riverberino alcune caratteristiche generali e interessanti della matematica in quanto tale, e quale posto occupino quelle discipline nel disegno generale. Insomma: come le varie porzioni della disciplina che dovrò insegnare possono trasmettere alcune idee di fondo della disciplina stessa e come si colleghino organicamente, tra loro e alla realtà.

Chiaramente in questo mio breve intervento non potrò entrare nel merito delle discipline specifiche, su questo farò solo qualche breve accenno più avanti.

Dò invece qualche breve spunto sulle *caratteristiche generali della matematica*, per mostrare come queste riflessioni che potrebbero sembrare “alte” e quindi lontane dai problemi pratici dell’insegnamento, generino in effetti dei criteri di indirizzo[1].

0. La matematica è uno dei grandi *metodi di conoscenza* (cioè strada di ricerca del vero) che l’umanità ha inventato, e ha caratteristiche interessanti. Non è solo “uno strumento”, come si dice spesso riduttivamente; se proprio volete usare la parola strumento, dite almeno “strumento di conoscenza”.

1. La matematica è una disciplina in grado di generare un grande accordo tra le persone attorno a ciò che è vero e falso, nel suo ambito.

2. E questo accordo attraversa tempo e spazio, da 2500 anni ad oggi attraverso ogni continente, mostrando l’unione di progresso e tradizione, con un sapere che cresce cumulativamente.

3. Cosa rende possibile questo grande accordo su ciò che è vero? Il metodo specifico della matematica, che è la *dimostrazione*. Quando si dimostra il teorema di Pitagora, con poche frasi si

[1] Le prossime affermazioni sono molto sintetiche e naturalmente andrebbero spiegate e argomentate con ampiezza. Rimando per questo ai miei articoli [B1], [B3].

convince l'ascoltatore di ogni tempo e luogo della verità di infinite affermazioni, che riguardano infiniti triangoli che si possono incontrare.

4. E l'*universalità delle conclusioni* di una dimostrazione è resa possibile dalla natura *astratta* degli oggetti matematici. Un'astrazione che quindi dà potenza al discorso matematico. Quindi la matematica è astratta? Certo, e questa è la radice profonda della sua potenza. Riprendiamoci l'orgoglio dell'astrazione, una delle grandi capacità della razionalità umana.

5. La storia della matematica mostra inoltre che questa astrazione non è nemica del rapporto con la realtà. Nessuna teoria matematica è troppo astratta perché non possa avere, oggi o domani, qualche ricaduta nello spiegarci un pezzo di realtà fisica. La matematica è diventata, da Newton in poi, il linguaggio della scienza.

Qualche criterio sull'insegnamento della matematica che segue dalle sue caratteristiche generali

Da queste prime osservazioni seguono già alcuni criteri generali per l'insegnamento.

a. Il valore centrale in matematica del discorso teorico: la matematica è uno sviluppo teorico di pensiero, non un insieme di ricette; la matematica non è fare esercizi; il nocciolo del metodo matematico è la dimostrazione, e *non si insegna matematica senza insegnare dimostrazioni*.

L'ultima affermazione va naturalmente declinata secondo l'età degli allievi. Se in un liceo si possono dimostrare teoremi in senso stretto, evidentemente non è questo il punto per i bambini della primaria. Il nocciolo del metodo della dimostrazione matematica è portare l'ascoltatore a riconoscere la *validità generale* di una certa affermazione e a capire il *perché* di questa verità. In questo senso più ampio, questa preoccupazione deve e può essere presente a tutti i livelli di età.

Un esempio elementare. Quando una maestra alla primaria è alle prese con l'area del rettangolo, se disegna su un foglio quadrettato un rettangolo che ha la base di 8 quadretti e l'altezza di 5 e pone ai bambini il problema di come calcolare il numero totale di quadratini che formano il rettangolo (questo è l'area, per definizione), una volta riconosciuto che il rettangolo è riempito da 5 file di 8 quadretti, e ricordato che per calcolare quanto fa 5 volte 8 abbiamo a disposizione la moltiplicazione, è chiaro che dovremo fare 5 per 8, cioè base per altezza. Chi ha capito il ragionamento in questo caso particolare sostanzialmente ha capito la regola generale. Il punto è convincere del *valore generale* di certe affermazioni anziché far cadere dall'alto le ricette.

Corollario: l'importanza dello studio su un libro di testo. Diciamo le cose come stanno: *ci si è rassegnati al fatto che la matematica sia una materia che non richiede di essere studiata*, quasi la si potesse imparare unicamente "per osmosi", stando un po' attenti in classe e facendo esercizio. Da decenni i libri di testo di matematica si usano troppo spesso solo come raccolte di esercizi, mentre le pagine di teoria non si aprono neppure. Si può discutere e litigare su di chi sia la colpa. Ma il punto è che questo scandalo deve finire: la matematica va (anche) studiata sui libri, così come la storia, la letteratura italiana o la biologia. Il docente deve riappropriarsi dell'uso di lezioni, libro di testo, interrogazioni e verifiche anche sulla teoria. La matematica dev'essere insegnata col suo spessore culturale, non può essere un addestramento. I libri di testo vanno scelti con cura, se è il caso riscritti, per questo scopo.

b. Il valore e l'importanza della conoscenza di un po' di storia della matematica nella formazione di un insegnante di matematica: *storia delle idee* per capirne la genesi, capire le difficoltà insite in certe conquiste -che lo studente puntualmente dovrà riattraversare-, avere mentalmente una gerarchia di importanza dei vari approfondimenti, avere chiare le motivazioni con cui certe cose sono introdotte...

Esempio 1. L'insegnamento del calcolo letterale agli inizi della secondaria di secondo grado. Credo che per l'insegnante sia salutare avere qualche idea sulla fatica con cui certe idee hanno richiesto secoli per emergere: dall'algebra retorica degli arabi nell'alto medioevo, all'algebra sincopata del rinascimento, alla svolta dell'algebra simbolica nel 1500, quanta fatica c'è voluta solo per poter "scrivere la generica equazione di secondo grado"! Cosa suggerisce questo per l'insegnamento? Su quali concetti occorre soffermarsi?

Esempio 2. L'insegnamento del calcolo differenziale in quinta liceo. A scuola si parla di limiti, poi di derivate, ma storicamente Newton e Leibnitz hanno inventato le derivate nel 1700, la definizione di limite è arrivata solo con Cauchy negli anni 1820. Questo la dice lunga sulla *gerarchia di importanza* degli argomenti limiti – derivate, a prescindere dalle *gerarchie logiche*.

c. Il valore del nesso tra matematica e fisica (nella secondaria di secondo grado), o più in generale tra matematica e scienza moderna. Voler mostrare questi nessi è un punto centrale dell'insegnamento (di entrambe le discipline!), per questo occorre costruire percorsi didattici tesi a evidenziare questo[2].

La matematica di quinta liceo è esemplare di questo nesso con la fisica. Il problema è che "arriva troppo tardi" rispetto a quando certi concetti sono stati introdotti in fisica. Pazienza: piuttosto che niente, una volta che in quinta si sono introdotte le derivate (e gli integrali) rivisitiamo certi argomenti di fisica studiati in classi precedenti per i quali ora abbiamo a disposizione il linguaggio matematico appropriato.

[2] Su questo tema si veda il mio articolo [B4]

“Insegnare a ragionare”. La questione del linguaggio matematico

Altro macro-tema che vogliamo toccare è quello dell’insegnare un certo uso della ragione. Partiamo da una domanda molto generale: si può insegnare a ragionare?

Rispondo pragmaticamente: non so se si può, ma so che *si deve* insegnare a ragionare. Intendo dire che non c’è un metodo che garantisca che tutti imparino a ragionare bene (questo non dipende solo da noi), ma come insegnanti non possiamo farcene una scusa per non fare del nostro meglio per insegnare a ragionare.

“Insegnare a ragionare” significa molte cose, qui circoscrivo il discorso a un unico aspetto, che è tra quelli importanti per la matematica: quello del *linguaggio e ragionamento logico.*

Faccio due osservazioni generali introduttive.

-Insegnare a ragionare, insegnare il metodo di una certa disciplina, richiede nell’insegnante anzitutto una *consapevolezza* del metodo stesso, che è qualcosa di più della *padronanza* del metodo. Non basta che io ragioni bene, occorre che sia diventato consapevole dei modi, delle forme del mio ragionare; occorre una riflessione e un’esperienza di introspezione, coltivata per il piacere di capire che cosa è servito a me per capire, qual era l’origine della mia incomprensione, del mio errore, che cosa mi aiuta a fare passi veloci, che cosa mi rallenta. Poi certamente occorre la capacità di immedesimazione, il desiderio e l’attenzione di capire il ragionamento dell’altro, la fatica altrui, l’errore o il fraintendimento altrui, e che cosa invece aiuta la persona che ho davanti a capire, cosa la mette in moto. Tutto questo è un lavoro che avviene *dentro* l’insegnante, anche se nel rapporto con gli allievi.

-Poi c’è il lavoro che l’insegnante fa in aula, quindi *con* gli allievi, e c’è il lavoro che sollecita *negli* allievi. Penso che il metodo, il ragionare, non si insegni *esclusivamente* dando il buon esempio di “metodo in azione”; questo è necessario, ma *non è l’unico strumento* che abbiamo. Abbiamo anche la possibilità di fare un lavoro espressamente mirato ad aiutare l’affinamento del metodo in chi abbiamo davanti. Un tempo espressamente dedicato ad un lavoro sul metodo, sul ragionamento. Dalla scuola primaria all’università, nell’insegnamento della matematica è utile ricavare tempi e spazi per un lavoro sul metodo, sul ragionamento, un esercizio mirato, volto all’acquisizione di una maggior consapevolezza logico-linguistica. Questo tipo di lavoro richiede strumenti. Il testo “Matematica. Questione di metodo” [BT], che ho scritto con Giancarlo Travaglini, è rivolto in parte a questo tipo di lavoro logico-linguistico: riflettere sulla struttura delle proposizioni matematiche, che tipicamente contengono *variabili* e *quantificatori*, su cosa significa che una *implicazione universale* (“per ogni x del tal insieme, se vale p(x) allora vale q(x)”) è vera o falsa, come si costruisce correttamente la *negazione* di una proposizione, ecc.; in parte approfondisce più specificamente la mentalità con cui va affrontato lo studio di un testo matematico, fatto di definizioni, dimostrazioni, esempi e contresempi, eccetera.

Per la mia esperienza, gli studenti si lasciano volentieri coinvolgere in questo tipo di esercizi logici. Forse perché non richiedono alcun prerequisito, ma solo il ragionare in tempo reale, accettano di mettersi in gioco, provano gusto a capire qualcosa di più di se stessi, della loro ragione in azione. Anche al prim'anno di università, non considerano questi esercizi con sufficienza, come dei "giochi per bambini", ma li prendono sul serio.

Queste cose dal mio punto di vista non sono preliminari, da trattare in qualche lezione introduttiva, oppure nelle prime pagine dei libri di testo, solo perché si usa far così, e poi si passa oltre, ai "contenuti veri": queste cose sono la stoffa di ogni ragionamento matematico. A questo tipo di lavoro può essere dedicato del tempo in classe, magari all'inizio di un anno o di un periodo, ma è anche importante che poi le attitudini di ragionamento inizialmente esemplificate su esercizi preliminari siano giocate e esemplificate dal docente sui contenuti matematici specifici che si affrontano nel corso, in una dimostrazione, nella lettura del testo di un problema, o altro.

Dal linguaggio ai linguaggi: il valore della disciplina specifica

Passiamo ora brevemente dal quadro generale agli argomenti più specifici di insegnamento della matematica. Lo facciamo declinando il discorso sul linguaggio matematico. Ogni disciplina ha un suo linguaggio, e al suo interno dei linguaggi più specifici. In matematica il linguaggio non è solo un certo uso della logica. C'è un altro aspetto del linguaggio, direttamente legato ai contenuti matematici. Si può dire anzi che l'insegnamento della matematica a scuola, in tutto il suo arco, consista in misura importante nell'insegnamento di certi linguaggi specifici della matematica[3]:

- la scrittura dei numeri, alla primaria;
- il linguaggio dell'algebra, o del "calcolo letterale", tra la fine della secondaria di primo grado e l'inizio di quella di secondo grado;
- la geometria analitica, o
- il linguaggio delle funzioni, nella secondaria di secondo grado.

Questi sono esempi di linguaggi matematici specifici che costituiscono una parte importante dell'insegnamento della matematica a scuola. Per diverse volte nell'arco dell'età scolastica, l'allievo è introdotto ad un nuovo linguaggio, con cui affronterà un nuovo contesto. In ciascuno di questi nuovi contesti molto spesso non si arriva lontano: grandi teorie, grandi teoremi, non se ne vedono spesso a scuola.

[3] Per un approfondimento sul tema di questo paragrafo rimando al mio articolo [B2].

Così allo studente resta il dubbio: ma il calcolo letterale si studia per poter fare esercizi di calcolo letterale? La geometria analitica si studia per poter fare esercizi di geometria analitica?

Occorre capire e valorizzare fino in fondo il ruolo dei vari linguaggi matematici specifici che sono insegnati a scuola, per apprezzare il fatto che insegnare e imparare questi linguaggi è molto di più che un addestramento tecnico. Diversamente, il docente avrà, come dicevo all'inizio, quell'atteggiamento "nostalgico" di chi pensa "la mia materia *sarebbe* bella, ma con queste quattro cose che si insegnano a scuola cosa vuoi comunicare...". Dobbiamo capire invece tutto il valore di queste "quattro cose" e fare di tutto per comunicarlo, nell'insegnamento.

Prendiamo ad esempio il linguaggio algebrico, del calcolo letterale: il concetto di incognita, l'idea di formalizzare un problema mediante un'equazione, la scrittura simbolica e il "calcolo letterale"…

Se riflettiamo su queste idee, magari avendo anche un'idea della fatica con cui storicamente sono emerse nell'arco di secoli[4], vediamo che il linguaggio matematico non è semplicemente un modo per comunicare certe idee, ma è esso stesso il luogo in cui *risiedono* certe idee. *Il linguaggio incorpora in sé progressi, idee, giudizi, astrazioni frutto di una lunga storia.* Per questo quando ragioniamo usando un certo linguaggio, certi problemi (non tutti!) appaiono banali, mostrano da sé la strada per la propria soluzione. Questo succede ad esempio quando certi problemi formulati nel linguaggio quotidiano vengono formalizzati con una semplice equazione di primo grado. In realtà il problema non può essere considerato banale di per sé; piuttosto, si può dire che in quel caso *il linguaggio si sia fatto carico della maggior parte del lavoro necessario a risolvere il problema*. Dire questo non è come dire che la fatica l'ha fatta la lavagna, o la penna: "il linguaggio" non è qualcosa di impersonale, è uno dei frutti di 2500 anni di storia e di tradizione matematica. Quindi non è qualcosa che ci è dato "gratis" (e quindi su cui possiamo non soffermarci più di tanto). Il linguaggio ricapitola i progressi concettuali di tutta una storia, e ci fa vedere le cose dalle spalle dei giganti. Ma se è stato faticoso arrivarci per l'umanità, se è stata una conquista di secoli, sarà faticoso anche oggi per chi lo incontra per la prima volta, e questo dice della pazienza e accortezza che occorre avere nell'insegnare queste cose, e anche della grande dignità che queste cose hanno. Altro che "banale equazione di primo grado"!

Ecco dove si innesta il discorso iniziale sull'importanza, per l'insegnante, di un lavoro di riappropriazione della consapevolezza del valore non solo della propria disciplina in generale, ma di ogni specifica macro-area della propria disciplina oggetto dell'insegnamento scolastico.

Concretamente, sottolineare l'aspetto di novità che il linguaggio introduce significa anche dedicare esplicitamente del tempo e spazio alla discussione di questi aspetti. Quanti studenti, tra coloro che hanno imparato a risolvere un'equazione di primo grado, saprebbero spiegare in modo

[4] di nuovo, torno a notare che un po' di conoscenza della storia delle idee matematiche per un insegnante di matematica non è un *optional*.

soddisfacente cosa vuol dire “incognita”? O cosa vuol dire “risolvere un’equazione”? (Non “come si fa a risolverla”!).

Qualche criterio per la costruzione di un percorso didattico

a. Riappropriarsi di motivazioni e obiettivi del percorso didattico

Abbiamo visto più volte negli anni cambiare programmi e indicazioni ministeriali, modalità di svolgimento degli esami di stato; abbiamo visto sorgere e declinare mode di vario tipo nell’insegnamento della matematica (anzi, per la verità il rischio è che ne sorgano continuamente di nuove e non ne declini nessuna, così che i programmi si gonfiano fino a esplodere). Gli insegnanti si sentono spesso tra l’incudine e il martello: da una parte un sistema che chiede loro sempre di più, d’altro canto una realtà fatta di ore settimanali limitate, vincoli di vario tipo, carenze di base negli studenti, situazioni problematiche in aumento tra gli studenti, ecc. ecc. E’ chiaro che bisogna venire a qualche compromesso. Il problema è il *criterio* con cui si fanno questi compromessi. Un rischio che vedo è che l’insegnante tracci il proprio percorso didattico in parte in ossequio a consuetudini e tradizioni consolidate, in parte per tutelarsi da esami di stato o condizionamenti di vario tipo, e con qualche taglio qua e là, per stare nei tempi, si arrivi a confezionare un percorso che ha poca coerenza e poca attrattività.

Si tratta di individuare (anche in base alle indicazioni nazionali) *gli obiettivi, anzitutto di contenuto, che si vogliono raggiungere, e costruire a ritroso un percorso che consenta di arrivare a quegli obiettivi, senza aver timore di tagliare elementi che a questo percorso non sono funzionali.*

In generale, nella costruzione di un percorso didattico, il criterio è: di ogni argomento che presento in aula devo sapere perché lo sto presentando. Il motivo può essere:

1) questo argomento è bello o significativo in sé (es.: voglio spiegare l’integrale definito perché voglio mostrare come il pensiero scientifico è arrivato a capire cosa sia e come si possa calcolare l’area di una regione a contorni curvilinei);

2) questo argomento –svolto in questo modo- è funzionale a un altro che dovrò trattare in seguito –svolto in quel certo modo- (es. voglio spiegare il limite finito di una funzione al finito, perché mi serve per definire la derivata di una funzione);

3) questo argomento è utile in un’altra materia (ad es. la fisica) (es. voglio spiegare che la derivata è la velocità istantanea di variazione di una grandezza, perché utilizzerò questo fatto in fisica).

Uno stesso argomento può avere più di una motivazione, ma deve averne almeno una: non può essere svolto solo perché si è sempre fatto così.

Esemplifico sull'argomento che mi è più congeniale, l'analisi matematica. Le indicazioni nazionali dicono che in quinta liceo occorre introdurre il calcolo differenziale e integrale sottolineandone in particolare i significati fisici e geometrici, il modo in cui il calcolo differenziale consente di affrontare problemi di massimo e minimo e il calcolo integrale consente di calcolare aree e volumi. Credo che sia possibile cercare di costruire, a ritroso, un percorso teorico interessante che arrivi a questi obiettivi senza troppe lungaggini.

Questo richiede da parte del docente *una grande padronanza della materia*: saper vedere dall'alto il percorso intero, avere chiaro di ogni cosa che dico oggi se e quando mi servirà in seguito, avere quindi il coraggio di smontare e rimontare il percorso secondo certi criteri, senza timore di eliminare qualcosa che non è funzionale al tutto. Non possiamo costruire il nostro percorso di insegnamento solo "in ossequio alle tradizioni…"

b. Sistematicità o motivazione?

Nell'insegnamento della matematica, la struttura logico-consequenziale porta a una certa organizzazione sistematica degli argomenti in grandi blocchi logici: prima studiamo le equazioni di primo grado, poi facciamo i problemi in cui si applicano; prima studiamo i limiti, poi le derivate: sistematicità, ordine, economia di pensiero e di tempo prezioso.

Ma questo significa molto spesso dire allo studente: "studia questo, poi capirai perché". ("Quando sarai grande capirai"). Così uno non ha le motivazioni, studia senza una chiave di lettura, una meta, un'ipotesi di lavoro, studia per dovere e dimentica tutto. Chiedere la fiducia agli studenti va bene, ma non possiamo chiedere una fiducia *cieca*: lo studente deve vedere o almeno intravedere un buon motivo per fare la fatica di studiare.

Ogni docente di matematica si scontra con questo *antagonismo tra sistematicità e motivazione*. Due caratteristiche che sono entrambe desiderabili, di per sé, ma purtroppo sono fra loro antagoniste: da una parte l'*economia di pensiero*, l'ordine e la sistematicità nel presentare i vari argomenti; d'altra parte il fornire agli studenti *motivazioni* per affrontare lo studio di un argomento.

Come ho detto, questi due obiettivi sono *veramente* antagonisti tra loro, in matematica: dobbiamo farcene una ragione. Detto questo, *se nel mio insegnamento devo scegliere tra sistematicità e motivazione, io scelgo motivazione.* Ma dare le motivazioni non è facile, richiede delle anticipazioni, dei discorsi informali, magari "discorsivi", non facili da preparare per il docente, e insoliti da ascoltare per lo studente, in matematica. Richiede di spezzare lo svolgimento di un argomento in due blocchi e inserirne in mezzo un altro (che di solito si fa prima o dopo). Sicuramente richiede di impiegare del prezioso tempo extra.

Un esempio tipico di quest'affermazione presa dall'analisi matematica di quinta liceo. Un percorso tradizionale di vari libri di testo: 1) calcolo differenziale; 2) ricerca delle primitive; 3) integrale definito. Se si procede così, per lo studente qual è la motivazione del passo 2? Ovviamente la motivazione è il passo 3 (che viene dopo), quindi noi stiamo dicendo: "fidati e studia, poi capirai perché". In alternativa si può fare invece: 1) calcolo differenziale; 2) integrale definito, cioè:

perché lo si introduce, come lo si definisce, le sue proprietà, il teorema fondamentale del calcolo integrale; allora adesso ci serve saper calcolare la primitiva di una funzione, quindi apriamo una parentesi e, 3) ricerca delle primitive. Per poi ritornare alle applicazioni dell'integrale definito (qualche volume o area, ad esempio). Non è più motivata, così, la fatica che si chiede allo studente?

C'è molto da lavorare nel ripensare la costruzione dei percorsi didattici matematici dando rilievo alle motivazioni. Questo però trasmetterebbe molto più significato, passione, nessi tra le cose, e forse renderebbe meno inesorabile il fatidico fenomeno dello "studio un argomento, poi passo oltre e dimentico quello precedente".

c. La matematica del docente: solo "scolastica"? La formazione permanente

La formazione iniziale di un insegnante di matematica non sempre di addentra in una matematica molto avanzata; e comunque, dopo anni dalla laurea, molto di ciò che non è stato mai ripreso in alcun modo viene dimenticato. È proprio vero che per un insegnante è sufficiente conoscere bene i contenuti che si devono insegnare?

Credo che per insegnare le discipline matematiche "scolastiche" offrendone un senso bisogna che il docente abbia in mente un quadro ben più ampio di ciò che insegna. Occorre aver presenti delle mete rispetto alle quali quelle discipline sono un pezzo di strada; un quadro sia teorico che storico in cui quelle discipline si inseriscono, dal punto di vista sia dello sviluppo del pensiero matematico in quanto tale, sia da quello delle applicazioni della matematica al mondo reale. Questo è un motivo per cui la *formazione permanente* dell'insegnante è importante: tenere vive le discipline matematiche studiate in università, o approfondire autonomamente almeno le discipline matematiche più direttamente legate ai contenuti che si insegnano. Quali sono gli sviluppi naturali delle matematiche che si studiano al liceo, ad esempio? Dove hanno portato, storicamente? Quali applicazioni fisiche consente la matematica che si studia a scuola, o quella che ne prosegue più direttamente lo sviluppo? Conoscenze di questo tipo arricchiscono il docente personalmente, gli consentono di offrire più motivazioni a tutti e in particolare agli studenti più curiosi. Questo è parte del lavoro che da anni facciamo col Laboratorio Effediesse del Dipartimento di Matematica del Politecnico [5]: seminari per insegnanti, corsi di formazione, pomeriggi di formazione… Possono esserci tanti strumenti e luoghi di formazione, ma il messaggio è: un insegnante non può smettere di studiare.

d. Sentirsi parte di una comunità di insegnanti in formazione permanente

Il lavoro di formazione di sé come insegnanti non solo può utilizzare strumenti che "qualcun altro" mette in campo, ma è giusto che sia mosso anche da un desiderio di *mettere in comune tra docenti* esperienze e riflessioni. Come sopra, possono esserci tanti strumenti e luoghi per questo. Ne cito

[5] https://fds.mate.polimi.it/

uno: la rivista online Emmeciquadro[6]. Scrivere (oltre che leggere) la recensione di un libro interessante, o scrivere (oltre che leggere) un breve articolo in cui raccontare un’esperienza didattica svolta in aula e fare qualche riflessione non è un’attività “per specialisti”, è qualcosa che potrebbe essere molto più frequente tra insegnanti motivati nel lavoro di formazione di cui abbiamo parlato.

[6] https://www.ilsussidiario.net/news/emmeciquadro/

Riferimenti bibliografici

Articoli e brevi saggi dell'autore sulla matematica e il suo insegnamento:

[B1] M. Bramanti: Che cos'è la matematica. Articolo in due parti su:
"Emmeciquadro", nr. 17, aprile 2003. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/17/mc2_17_bramanti_cosa-e-la-matematica.pdf
"Emmeciquadro", nr. 18, agosto 2003. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/18/mc2_18_bramanti_cosa-e-la-matematica.pdf

[B2] M. Bramanti: I linguaggi matematici. Idee e simboli. Articolo in due parti su:
"Emmeciquadro", nr. 42, agosto 2011. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/42/mc2_42_bramanti_linguaggi-matematici.pdf
"Emmeciquadro", nr. 43 - dicembre 2011. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/43/mc2_43_bramanti_laboratorio-matematica.pdf

[B3] M. Bramanti: Elogio dell'astrazione. L'interesse degli oggetti matematici. Articolo in due parti su:
"Emmeciquadro", nr. 49 - giugno 2013. Scaricabile al link:
http://www.ilsussidiario.net/News/emmeciquadro/Emmeciquadro-n-49/2013/6/26/SCIENZAinATTO-Elogio-dell-Astrazione-L-interesse-degli-Oggetti-Matematici-1-/397567/
"Emmeciquadro", nr. 50 - settembre 2013. Scaricabile al link:
http://www.ilsussidiario.net/News/emmeciquadro/Emmeciquadro-n-50/2013/7/1/SCIENZAinATTO-Elogio-dell-Astrazione-L-interesse-degli-Oggetti-Matematici-2-/400840/

[B4] M. Bramanti: La Matematica come linguaggio della scienza. Articolo su:
"Emmeciquadro", nr. 63 - dicembre 2016. Scaricabile al link:
https://emmeciquadro.euresis.org/mc2/63/mc2_63_bramanti_matematica-come-linguaggio.pdf

[B5] M. Bramanti: La Matematica degli ultimi decenni. Articolo su:
"Emmeciquadro", nr. 50 - settembre 2013. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/50/mc2_50_bramanti_matematica-ultimi-decenni.pdf

Sul linguaggio matematico e l'introduzione allo studio della matematica universitaria:

[BT] M. Bramanti, G. Travaglini: Matematica. Questione di Metodo. Zanichelli, 2009.

Saggi su cos'è la matematica:

[CR] R. Courant, H. Robbins: Che cos'è la matematica? Boringhieri, 1950.

[De] K. Devlin: Il linguaggio della matematica. Rendere visibile l'invisibile. Bollati Boringhieri, 2014.

[Da] P. Davis, R. Hersh: The mathematical experience. Mariner Books, 1998.

[Ru] B. Russell: I princìpi della matematica, Newton Compton. Roma, 1989.

[Is] G. Israel: La visione matematica della realtà, Laterza, 2003.

Saggi sull' insegnamento della matematica:

[Ma] R. Manara: La matematica e la realtà. Linee di metodo. Marietti, 2002.

[IMG] G. Israel, A. Millan Gasca: Pensare in Matematica. Zanichelli, 2012.

Storia della matematica:

[Kl] M. Kline: Storia del pensiero matematico. In due volumi: I. Dall'antichità al settecento; II. Dal settecento a oggi. Biblioteca Einaudi, 1999.

[Gi] E. Giusti: Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento. Il giardino di Archimede. Pisa – Roma. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali. 2007.

Qualche libro divulgativo per dare un'idea di insieme delle varie discipline matematiche:

Sull'analisi matematica:
[Ac] David Acheson: Viaggio nel calcolo infinitesimale. Zanichelli, 2022.

Sulla geometria:
[An] Marco Andreatta: La forma delle cose. L'alfabeto della geometria. Il Mulino, 2019.

Sull'algebra:
[Der] John Derbyshire: Ignote quantità. Storia reale e immaginaria dell'algebra. Bollati Boringhieri, 2017.

Sulla probabilità:
[Ek] Ivar Ekeland: A caso. La sorte, la scienza e il mondo. Bollati Boringhieri, 1992.

Sulla matematica applicata:
[Qu] Alfio Quarteroni. Le equazioni del cuore, della pioggia e delle vele. Modelli matematici per simulare la realtà. Zanichelli, 2020.

Catalogo di una mostra divulgativa sulla matematica:
[EU] EURESIS (AA.VV.): Da uno a infinito: al cuore della matematica. (Catalogo della mostra presentata al Meeting di Rimini 2010). Frimedia 2010. v. www.euresis.org, www.itacalibri.it

Matematica a fumetti

La storia della ricerca dei fondamenti della matematica intorno al 1900, vista con gli occhi di Bertrand Russell, uno dei protagonisti, e raccontata con un fumetto:

[DP] Apostolos Doxiadis, Christos H. Papadimitriou (Autori), Alecos Papadatos e Annie Di Donna (Illustratori): Logicomix. Ed. Guanda, 2010.

ASSOCIAZIONE CULTURALE
IL RISCHIO
EDUCATIVO

Strumenti in rete

La rivista online (libera) «Emmeciquadro», rivolta a insegnanti di materie scientifiche delle scuole di ogni ordine e grado. Si veda il sito:
http://www.ilsussidiario.net/News/Emmeciquadro

Le attività di formazione docenti del laboratorio Effediesse del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano (cicli di seminari, corsi o pomeriggi di formazione, ecc.). Si veda:
http://fds.mate.polimi.it

M. Bramanti. L'infinito in matematica. Conferenza tenuta il 25/10/2019 a Valdagno (Vicenza) nell'ambito del ciclo di conferenze “La via delle scienze”. Filmato youtube della conferenza:
https://www.youtube.com/watch?v=UWs23PnsPaM

marco.bramanti@polimi.it
http://www1.mate.polimi.it/~bramanti