

Perché questo libro

Da sempre molte persone incontrano difficoltà nello studio della matematica, sia a scuola sia negli studi universitari. Secondo noi questa fatica è spesso riconducibile a due carenze, che è utile distinguere.

1. Prerequisiti. Lo studio della matematica è organizzato in un percorso logico che dalla Scuola Primaria fino all'Università procede sequenzialmente, in modo ben più marcato che in altre discipline. Ne segue che un eventuale “periodo di difficoltà” nello studio della matematica, in qualunque fase del percorso scolastico dello studente, comporti di lì in poi una “debolezza sui prerequisiti” che non sempre viene risolta in seguito. Tra gli studenti che iniziano corsi universitari scientifici questo problema è molto diffuso, e chi se ne rende conto deve decidere di dedicare tempo ed energia per acquisire i contenuti mancanti. Per farlo può riprendere i suoi libri di matematica della Scuola Secondaria, oppure cercare testi specifici (ne esistono diversi, scritti in ambito universitario) che offrano una presentazione ragionata, ma anche sufficientemente sintetica della materia.

2. Metodo. D'altra parte, se molti studenti incontrano difficoltà nello studio della matematica, questo si deve anche (e a volte soprattutto) al particolare metodo di studio che la matematica richiede di sviluppare: bisogna comprendere la necessità di un linguaggio preciso e saperlo utilizzare quando necessario, familiarizzarsi con gli strumenti logici ed il simbolismo matematico, comprendere le giustificazioni dei risultati (esercizi, teoremi, tecniche di calcolo) verificandone i passaggi, esemplificandole e riutilizzandole in situazioni analoghe. In sintesi: *fare propria una certa forma mentale che privilegi sistematicamente il ragionamento rispetto alla memorizzazione e all'applicazione di schemi meccanici*. Molti studenti, pur sostanzialmente consapevoli delle proprie carenze su questi punti, non sanno come porvi rimedio e, nell'arco degli anni di scuola, si sono via via rassegnati a “puntare al minimo in matematica”, un minimo che cercano di raggiungere con molto esercizio e con quella memorizzazione e applicazione di schemi meccanici di cui sopra. Molti docenti, ad ogni livello del percorso formativo, rilevano questo atteggiamento negli studenti, ma raramente c'è l'occasione di svolgere un lavoro esplicitamente mirato a coltivare una mentalità diversa: di solito ci si attende che lo studente impari il metodo affrontando seriamente il contenuto e osservando il buon esempio di “metodo in azione” offerto dal docente. È un'attesa ragionevole: la maggior parte degli studenti che iniziano i corsi universitari scientifici non incontra gravi difficoltà negli esami di matematica.

Non è però questa l'esperienza di molte altre matricole, oggetto di quella "selezione naturale" che avviene durante il primo anno dei corsi universitari. Non è vero che tutti gli studenti in possesso di un diploma di maturità hanno le capacità necessarie per affrontare un corso di studi universitario in cui è presente la matematica. È però vero che molti degli studenti che abbandonano gli studi universitari a causa della matematica avrebbero potuto "salvarsi" attraverso un lavoro specifico iniziato per tempo.

Questo libro nasce quindi dalla convinzione che un lavoro mirato a coltivare la "forma mentis matematica" sia per molti studenti necessario e possibile. Nel proporlo, la nostra ambizione è far incontrare due parenti che si parlano poco: la Matematica della Bellezza (quella che appare in certi libri divulgativi, o in conferenze, mostre, articoli nelle pagine scientifiche dei giornali, e perfino in qualche film...) e la Matematica della Fatica (che molti ragazzi conoscono bene). La fatica si supera acquisendo un metodo di lavoro adeguato, meglio se attraverso esempi belli e interessanti; alla fine la bellezza non è solo nell'ammirazione per ciò che altri hanno fatto, ma soprattutto nell'aver fatto proprio un metodo di ragionamento che ha arricchito le potenzialità della nostra mente.

Questo libro dovrebbe essere usato durante gli ultimi due anni della Scuola Secondaria, oppure (meglio tardi che mai) all'inizio dei corsi universitari: è stato scritto sia per offrire uno strumento di uso personale, sia per l'organizzazione di veri e propri corsi con la finalità descritta sopra.

Il contenuto

La prima parte del testo vuole dare allo studente la necessaria precisione di linguaggio, la sicurezza nell'uso di implicazioni, contresempi, dimostrazioni per assurdo, la conoscenza dei simboli utilizzati nello studio e nelle operazioni all'interno di insiemi generici ed in particolare di insiemi numerici. È una parte che riguarda quindi la forma mentis matematica nei suoi aspetti logico-sintattici direttamente coinvolti nei primi insegnamenti universitari di matematica.

La seconda parte vuole essere invece una "palestra" per abituarsi per tempo alle difficoltà proprie di un testo di matematica universitario. Si insegna ad esempio a studiare una definizione cercandone innanzitutto esempi significativi, poi esaminandola in generale attraverso la verifica o la confutazione di varie implicazioni. Oppure ci si preoccupa di come si studia una dimostrazione (o una qualsiasi argomentazione matematica), innanzitutto visualizzandola attraverso opportuni esempi, poi spezzando il ragionamento in passi, quindi ricostruendola da soli "su un foglio bianco", ripulendola da eventuali imperfezioni, infine verificandone la comprensione anche attraverso il suo utilizzo nell'affrontare problemi differenti. Tutto questo attraverso esercizi, scelti non in base all'argomento (algebra, geometria, numeri interi, ...) ma in quanto funzionali al lavoro appena descritto. Sono esercizi impegnativi e a volte difficili, ma quasi sempre privi di prerequisiti e, ci auguriamo, piacevoli e interessanti: una sfida equa per lo studente che ha già lavorato sulla prima parte del libro, indipendentemente dal fatto di avere svolto male o in fretta alcuni argomenti del programma di matematica della Scuola Secondaria.

Dopo la seconda parte, il lavoro proposto in questo libro è in un certo senso concluso,

e il lettore che abbia fin qui lavorato seriamente dovrebbe essere più che pronto per studiare un “normale” libro universitario di matematica. Abbiamo però deciso di aggiungere una terza parte, più breve delle precedenti, per dar modo al lettore curioso di assaggiare qualcosa di ancor più vicino alla matematica universitaria e confrontarsi con un discorso matematico articolato in varie pagine (come accade nei libri di testo) anziché in singoli esempi. Si potrebbe dire: dopo tanti allenamenti, finalmente giocare qualche partita. Gli argomenti di questi ultimi capitoli non sono tutti “importanti” per lo studente, ma crediamo che in ciascuno di essi sia rilevabile un punto di vista e un insieme di idee originali, che probabilmente lo studente incontrerà nei suoi studi futuri, eventualmente in contesti diversi, ma sui quali, anche se sollecitato dal docente, potrebbe non avere il tempo e lo spirito per soffermarsi e riflettere.

Ciascuna delle tre parti del libro è costruita in modo modulare, così che lo studente possa usufruirne a vari livelli di approfondimento, a seconda dei suoi obiettivi (il tipo di corso a cui si iscriverà, il tempo a disposizione e il suo eventuale interesse per la matematica). Vedi più avanti le “Istruzioni per l’uso”. Dal punto di vista dei *contenuti matematici*, nel libro ci sono alcune ripetizioni che non ci siamo preoccupati di eliminare, allo scopo di mantenere i vari esercizi sostanzialmente “autocontenuti” e quindi incoraggiare un uso non eccessivamente sequenziale del libro.

Il lavoro del lettore e la storia del nostro lavoro

Questo è un libro da leggere con mente sveglia e carta e matita a portata di mano: chiediamo allo studente un lavoro duro, continuo ed essenzialmente individuale (ma, per la nostra esperienza, anche stimolante e divertente), del quale comunque farebbe bene a parlare con il suo docente di matematica della Scuola Secondaria.

Abbiamo scritto “per la nostra esperienza” perché questo libro ha una lunga storia: già alla fine degli anni Settanta, gruppi di laureandi e borsisti, aiutati e incoraggiati da alcuni docenti, in particolare il Prof. Carlo Felice Manara, tenevano, in forma non ufficiale, dei “corsi di orientamento per matricole” del Corso di Laurea in Matematica a Milano, basati su un’idea non lontana da quella sviluppata in questo libro, poi elaborata e concretizzata con l’aiuto di molti amici, ai quali questo lavoro è dedicato. Centinaia di studenti sono passati per questi precorsi, alimentando l’esperienza di alcune persone da cui nel 1985 prese forma un libro¹, che è stato uno dei punti di partenza per il presente testo. Questa impostazione è stata ripresa in altre esperienze condotte in varie università, tra cui un progetto di e-learning sviluppato nell’Università di Milano-Bicocca.

Abbiamo deciso ora di ripensare a quelle idee, che ci sembrano tuttora valide, e ripresentarle, rielaborate alla luce della nostra esperienza di insegnamento universitario e delle ulteriori riflessioni didattiche che abbiamo avuto modo di sviluppare in questi anni, nella speranza che il lavoro scaturito possa essere d’aiuto e di stimolo per molte altre persone, oggi come in passato. Sempre con l’idea di non separare lo

¹M. Andreini, G. Travaglini, *Una introduzione allo studio della matematica nell’università*. Ed. CUSL, Milano, 1985.

studio e la sua fatica dall'arricchimento che la matematica, come ogni aspetto del sapere, dà a chi sa e vuole ascoltare.

Siamo lieti di ringraziare Luca Brandolini, Leonardo Colzani, Giacomo Gigante, Raffaella Manara, Margherita Mauri, Marco Pedroni, Giovanna Sabadini, Agnese Travaglini, Roberto Travaglini che hanno letto e commentato parti del manoscritto. Siamo inoltre grati alla Casa Editrice Zanichelli e in particolare a Isabella Nenci per avere creduto in questo lavoro. Ringraziamo fin d'ora i lettori che vorranno farci avere le loro osservazioni.

Marco Bramanti
Giancarlo Travaglini
Marzo 2009

Istruzioni per l'uso

Il livello di preparazione matematica che si intende raggiungere cambia a seconda del corso di laurea a cui ci si vuole iscrivere. Per questo (comunque nel rispetto degli interessi del lettore) proponiamo questo libro con tre livelli di utilizzo, identificati lungo tutto il volume attraverso le lettere e i colori seguenti:

Livello A Rivolto a chi incontra strumenti matematici in altre scienze e dev'essere in grado di riconoscere e utilizzare correttamente un ragionamento matematico. Un livello pensato per chi intende iscriversi a un corso di laurea che prevede uno o pochi esami di matematica.

Livello B Più impegnativo del precedente, rivolto a chi deve acquisire pienamente e criticamente un ragionamento matematico. Dunque previsto per chi intende iscriversi a un corso di laurea dove la matematica ha un ruolo fondamentale (Fisica, Informatica, Ingegneria, Matematica, Statistica, . . .)

Livello C *Decisamente impegnativo*, rivolto a chi vuole confrontarsi con una matematica che, pur teoricamente accessibile ad uno studente che esce dalla Scuola Secondaria, è difficile e in qualche caso non lontana da studi avanzati.

La regola del gioco è che

- chi è interessato al livello A segue le parti del libro a questo dedicate,
- chi è interessato al livello B segue A e B,
- chi è interessato al livello C segue A, B e C.

Nei livelli A e B vengono assunte le normali conoscenze di matematica impartite nei primi quattro anni delle Scuole Secondarie. Per affrontare il livello C è a volte necessario conoscere il calcolo combinatorio o il calcolo differenziale e integrale normalmente insegnati nell'ultimo anno del Liceo Scientifico e di altre Scuole Secondarie.

La percezione del grado di difficoltà di un esercizio è sempre un po' soggettiva, e a volte il lettore potrebbe non condividere la nostra classificazione in A, B, C. Abbiamo comunque ritenuto utile orientare lo studente indicando questi diversi "livelli", anche per permettere percorsi più brevi ma coerenti. Affinché nessuno si scoraggi, sottolineiamo che gli esercizi del livello C sono talvolta molto impegnativi, e una preparazione a questo livello non è affatto *necessaria* per *iniziare* lo studio della matematica universitaria: vogliamo piuttosto dare un'idea di "dove si può arrivare" proseguendo per questa strada. Segnaliamo infine che il livello C è assente nella Parte I del libro.