

Indice

1	Equazioni differenziali	1
1	Modelli differenziali	2
2	Equazioni del primo ordine	4
2.1	Generalità	4
2.2	Equazioni a variabili separabili	5
2.3	Equazioni lineari del primo ordine	10
3	Equazioni lineari del secondo ordine	18
3.1	Spazi di funzioni	19
3.2	Generalità sulle equazioni lineari. Problema di Cauchy	20
3.3	La struttura dell'integrale generale	22
3.4	Equazioni omogenee a coefficienti costanti	26
3.5	Equazioni non omogenee	28
3.6	Vibrazioni meccaniche	35
4	Complementi	42
4.1	Teorema di esistenza e unicità per le equazioni a variabili separabili	42
4.2	Cenni alle equazioni lineari di ordine n	44
2	Calcolo infinitesimale per le curve	49
1	Richiami di calcolo vettoriale	49
2	Funzioni a valori vettoriali, limiti e continuità	52
3	Curve regolari e calcolo differenziale vettoriale	55
3.1	Esempi introduttivi	55
3.2	Arco di curva continua	58
3.3	Derivata di una funzione vettoriale. Arco di curva regolare	60
3.4	Integrale di una funzione a valori vettoriali	64
3.5	Alcune classi di curve piane	65
4	Lunghezza di un arco di curva	68
4.1	Curve rettificabili e lunghezza	68
4.2	Cambiamenti di parametrizzazione, curve equivalenti	72
4.3	Parametro arco o ascissa curvilinea	73
5	Integrali di linea (di prima specie)	74
6	Elementi di geometria differenziale delle curve	78
6.1	Curvatura e normale principale per una curva in \mathbb{R}^m	78
6.2	Calcolo della curvatura per curve nello spazio \mathbb{R}^3 o nel piano	82
6.3	Torsione e terna intrinseca per curve nello spazio \mathbb{R}^3	85

7	Complementi	90
	7.1 Lunghezza di una curva regolare	90
	7.2 Alcune applicazioni fisiche notevoli	92
3	Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili	95
1	Grafici e insiemi di livello	95
2	Limiti e continuità per funzioni di più variabili	99
	2.1 Definizioni e proprietà di limiti e funzioni continue	99
	2.2 Calcolo dei limiti in più variabili: analisi delle forme di indeterminazione	102
3	Topologia in \mathbb{R}^n e proprietà delle funzioni continue	107
	3.1 Concetti fondamentali	108
	3.2 Proprietà topologiche delle funzioni continue	115
4	Derivate parziali, piano tangente, differenziale	119
	4.1 Derivate parziali	119
	4.2 Piano tangente	122
	4.3 Differenziabilità e approssimazione lineare	124
	4.4 Derivate direzionali	130
	4.5 Calcolo delle derivate	134
5	Derivate di ordine superiore e approssimazioni successive	143
	5.1 Derivate di ordine superiore	143
	5.2 Differenziale secondo, matrice Hessiana, formula di Taylor al secondo ordine	148
6	Ottimizzazione. Estremi liberi	152
	6.1 Generalità sui problemi di ottimizzazione	152
	6.2 Estremi liberi. Condizioni necessarie del prim'ordine	155
	6.3 Forme quadratiche. Classificazione	157
	6.4 Forme quadratiche. Test degli autovalori	161
	6.5 Studio della natura dei punti critici	164
7	Funzioni convesse di n variabili	176
	7.1 Generalità sulle funzioni convesse	176
	7.2 Ottimizzazione di funzioni convesse e concave	179
8	Funzioni definite implicitamente	181
	8.1 Funzione implicita di una variabile	181
	8.2 Funzione implicita di n variabili	186
9	Complementi	188
	9.1 Topologia e funzioni continue	188
	9.2 Funzioni omogenee	190
	9.3 Differenziali e formula di Taylor di ordine superiore	195
4	Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali	199
1	Funzioni di più variabili a valori vettoriali: generalità	199
	1.1 Superfici in forma parametrica	199
	1.2 Trasformazioni di coordinate	201
	1.3 Campi vettoriali	203
2	Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	205
3	Superfici regolari in forma parametrica	208

4	Varietà k -dimensionali in \mathbb{R}^n e funzioni definite implicitamente	216
4.1	Varietà k -dimensionali in \mathbb{R}^n in forma parametrica	216
4.2	Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni	218
4.3	Varietà k -dimensionali in \mathbb{R}^n in forma implicita	220
5	Trasformazioni di coordinate e loro inversione	222
5.1	Il teorema della funzione inversa	222
5.2	Trasformazione di operatori differenziali	227
6	Ottimizzazione. Estremi vincolati	229
6.1	Vincoli di uguaglianza e moltiplicatori di Lagrange. Funzioni di due variabili	229
6.2	Moltiplicatori di Lagrange. Il caso generale	238
6.3	Vincoli di disuguaglianza e teorema di Kuhn-Tucker	244
5	Calcolo integrale per funzioni di più variabili	247
1	Integrali doppi	247
1.1	Integrale di una funzione limitata definita su un rettangolo	247
1.2	Funzioni integrabili su domini non rettangolari. Insiemi semplici, regolari, misurabili	254
1.3	Proprietà elementari dell'integrale doppio	259
1.4	Calcolo degli integrali doppi: metodo di riduzione	261
1.5	Calcolo degli integrali doppi: cambiamento di variabili	269
2	Integrali doppi generalizzati	274
3	Il calcolo degli integrali tripli	276
4	Derivazione sotto il segno di integrale	282
5	Complementi	284
5.1	La funzione Gamma di Eulero	284
5.2	Definizioni e proprietà elementari degli integrali in \mathbb{R}^n	287
6	Campi vettoriali	291
1	Campi vettoriali e integrali di linea di seconda specie	291
1.1	Linee di campo	291
1.2	Gradiente, divergenza e rotore	293
1.3	Integrale di linea di un campo vettoriale. Lavoro e circuitazione.	297
1.4	Campi conservativi e potenziali	299
1.5	Campi irrotazionali. Insiemi semplicemente connessi	303
1.6	Campi solenoidali e potenziale vettore	308
1.7	Il linguaggio delle forme differenziali	312
2	Formula di Gauss-Green nel piano	314
3	Area e integrali di superficie	318
3.1	Area di una superficie	318
3.2	Integrale di superficie di una funzione continua	323
4	Integrale di superficie di un campo vettoriale. Flusso	325
4.1	Superfici orientate. Bordo di una superficie. Superfici regolari a pezzi	326
4.2	Flusso	329
5	Teorema della divergenza	332
6	Teorema del rotore	337

7	Serie di potenze e serie di Fourier	345
1	Serie di funzioni e convergenza totale	345
2	Serie di potenze	352
2.1	Proprietà fondamentali delle serie di potenze	352
2.2	Serie di Taylor e serie di potenze	359
3	Serie trigonometriche e serie di Fourier	365
3.1	Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche	365
3.2	Richiami sugli spazi vettoriali con prodotto scalare	369
3.3	Coefficienti e serie di Fourier di una funzione. Approssimazione in media quadratica	372
3.4	Esempi e osservazioni sul calcolo dei coefficienti di Fourier	377
3.5	Forma esponenziale complessa delle serie di Fourier	382
3.6	Convergenza puntuale delle serie di Fourier	384
3.7	Alcune interpretazioni fisiche	393
3.8	Applicazioni alle equazioni differenziali della fisica matematica. Metodo di separazione delle variabili	395
4	Complementi	407
4.1	Il metodo di Frobenius per la soluzione delle equazioni differenziali	407
4.2	Criteri per la convergenza delle serie trigonometriche	410
4.3	Fenomeno di Gibbs	412
8	Teoria qualitativa di equazioni differenziali e sistemi	415
1	Equazioni del prim'ordine	415
1.1	Problema di Cauchy	415
1.2	Alcune classi di equazioni del prim'ordine	425
1.3	Equazioni autonome. Diagrammi di fase. Stabilità	428
2	Problema di Cauchy per sistemi di n equazioni del prim'ordine o equazioni di ordine n	433
3	Complementi	439
3.1	Lemma di Gronwall e dipendenza continua	439
4	Sistemi autonomi bidimensionali	441
4.1	Generalità	441
4.2	Stabilità per sistemi autonomi lineari	452
4.3	Stabilità per sistemi autonomi non lineari	459