

## Premessa

Questo testo raccoglie il materiale da me utilizzato, da qualche anno, per le esercitazioni del corso di Analisi III tenuto dal prof. Carlo Pagani presso la facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Trattandosi di un corso che tocca argomenti provenienti da vari settori dell'analisi matematica (come si può vedere sfogliando l'indice di questo libro), risultava difficile suggerire agli studenti un unico testo, accessibile, che potesse costituire un riferimento per esercizi, esempi e osservazioni su questi argomenti. E' questa la motivazione principale che mi ha spinto, su richiesta degli studenti, a raccogliere in un libro il contenuto delle mie esercitazioni. Il testo ha mantenuto il carattere "alla buona" dell'esposizione in aula, e riflette ovviamente le particolari esigenze didattiche del corso per il quale è nato. Perciò, mentre in generale si presentano esempi e osservazioni che presuppongono la conoscenza della teoria sottostante, in alcuni casi si è fornita un'esposizione sommaria della teoria stessa: è questo il caso della trasformata di Laplace (cap. 14), delle equazioni quasilineari del 1° ordine (cap. 16), delle funzioni di Bessel (cap. 23) e, in parte, delle funzioni speciali trattate nel § 13.3.

Il testo raccoglie più materiale di quanto possa essere ragionevolmente svolto in una cinquantina di ore di esercitazioni. Questo vale soprattutto per la 3<sup>a</sup> parte (equazioni a derivate parziali), per la quale ho inteso fornire allo studente una certa varietà di esempi, che possano servire da orientamento nell'affronto di problemi simili. Così pure l'ultimo capitolo (funzioni di Bessel) è stato pensato come un piccolo prontuario che lo studente potrà consultare all'occorrenza.

Desidero ringraziare la Prof. ssa Luisa Rossi Costa che ha letto il manoscritto e ha dato utili suggerimenti nella stesura di questo testo. La responsabilità degli eventuali errori è naturalmente mia.

Desidero inoltre ringraziare la CUSL che ha reso possibile la pubblicazione, in tempi brevi, di questo volume, ed Emanuele Volpe per il lavoro di battitura del testo.

Milano, Settembre '93.

# Indice

## Parte I.

### Funzioni olomorfe

<b>Cap. 1.</b>	<b><i>LE FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE COMPLESSA</i></b>	10
1.1.	Relazioni tra funzioni elementari	10
1.2.	Parte reale, parte immaginaria e modulo delle funzioni $f^D$ , $\sin D$ , $\cos D$ , $\text{Sh } D$ , $\text{Ch } z$	12
1.3.	Periodicità e zeri delle funzioni $f^D$ , $\sin D$ , $\cos D$ , $\text{Sh } D$ , $\text{Ch } z$	14
<b>Cap. 2.</b>	<b><i>CONDIZIONI DI MONOGENEITÀ. DERIVABILITÀ IN SENSO COMPLESSO. FUNZIONI ARMONICHE</i></b>	17
2.1.	Condizioni di monogeneità e derivabilità in senso complesso	"(
2.2.	Funzioni armoniche. Armonica coniugata	22
<b>Cap. 3.</b>	<b><i>CALCOLO DI INTEGRALI NEL CAMPO COMPLESSO. FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY</i></b>	30
3.1.	Primi esempi di calcolo di integrali nel campo complesso	\$(
3.2.	Esempi di calcolo di integrali reali con metodi di variabile complessa	34
3.3.	Calcolo di integrali nel campo complesso mediante formule integrali di Cauchy	41
<b>Cap. 4.</b>	<b><i>SVILUPPI IN SERIE DI LAURENT. STUDIO DELLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE. CALCOLO DEI RESIDUI</i></b>	44
4.1.	Richiami sul calcolo con serie di potenze	44
4.2.	Sviluppi di Laurent	48
4.3.	Studio delle singolarità isolate di una funzione mediante sviluppi di Laurent	50
<b>Cap. 5.</b>	<b><i>APPLICAZIONI DEI TEOREMI DEI RESIDUI</i></b>	60
5.1.	Applicazioni dei teoremi dei residui al calcolo di integrali nel campo complesso	61
5.2.	Applicazioni dei teoremi dei residui al calcolo di integrali di variabile reale	64
5.2.1.	<i>Integrali di funzioni razionali</i>	64
5.2.2.	<i>Lemmi di Jordan</i>	67

5.2.3.	<i>Integrali del tipo <math>\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz</math>, <math>\int_C \frac{f(z)}{z} dz</math>, <math>\int_C f(z) dz</math></i>	71
5.2.4.	<i>Integrali del tipo <math>\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz</math>, <math>\int_C \frac{f(z)}{z} dz</math>, <math>\int_C f(z) dz</math></i>	79
5.2.5.	<i>Integrali che richiedono cammini di tipo rettangolare</i>	82
5.3.	<i>Applicazioni del teorema dell'indicatore logaritmico e del teorema di Rouché</i>	87
<b>Cap. 6.</b>	<b><i>TRASFORMAZIONI DEL PIANO COMPLESSO. MAPPE CONFORMI</i></b>	90
6.1.	Alcune trasformazioni notevoli del piano complesso	90
6.2.	Mappe conformi	93
<b>Cap. 7.</b>	<b><i>FUNZIONI POLIDROME</i></b>	100
7.1	Classificazione delle polidromie e ricerca dei punti di diramazione	100
7.2.	Calcolo di integrali col metodo dei residui e funzioni polidrome	108

## Parte II.

### Spazi di funzioni, integrale di Lebesgue, trasformate

<b>Cap. 8.</b>	<b><i>SPAZI VETTORIALI. SPAZI METRICI. SPAZI NORMATI</i></b>	113
8.1.	Esempi di spazi di funzioni	113
8.2.	Spazi metrici completi. Sottospazi	115
8.3.	Spazi di successioni	121
<b>Cap. 9.</b>	<b><i>MISURA DI LEBESGUE</i></b>	123
9.1.	Alcuni esempi di insiemi misurabili	123
9.2.	Misura e dimensione di Hausdorff di un insieme. Insiemi frattali.	126
<b>Cap. 10.</b>	<b><i>FUNZIONI MISURABILI</i></b>	130
10.1.	Funzioni misurabili, funzioni continue, proprietà vere quasi ovunque	130
10.2.	I teoremi di Egoroff e di Lusin	132
<b>Cap. 11.</b>	<b><i>INTEGRALE DI LEBESGUE</i></b>	137

11.1.	Relazioni tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue	137
11.2.	Integrazione per successioni	140
11.3.	Integrazione per serie	144
11.4.	Integrali doppi: teoremi di Fubini-Tonelli	147
11.5.	Il teorema fondamentale del calcolo. La funzione di Vitali.	150
11.6.	Derivazione sotto il segno di integrale	151
11.7.	Convoluzione di funzioni	153
<b>Cap. 12.</b>	<b>SPAZI <math>L^p</math></b>	158
12.1.	Esempi sull'appartenenza di una funzione a spazi $L^p$	158
12.2.	Disuguaglianza di Hölder	160
12.3.	Teorema di Lebesgue e convergenza in norma $L^p$	163
12.4.	Gli spazi $L^p$	164
12.5.	Disuguaglianza di Hölder in spazi $L^p$	166
<b>Cap. 13.</b>	<b>SPAZI DI HILBERT</b>	167
13.1.	Esercizi sulla geometria negli spazi di Hilbert	167
13.2.	Uguaglianza del parallelogramma. Norme Hilbertiane	170
13.3.	Sistemi ortonormali completi formati da autosoluzioni di problemi differenziali. Funzioni speciali	171
13.3.1.	<i>Polinomi di Legendre</i>	173
13.3.2.	<i>Polinomi di Laguerre</i>	180
13.3.3.	<i>Polinomi di Hermite</i> Grafici	184 188
<b>Cap. 14.</b>	<b>LA TRASFORMATATA DI LAPLACE</b>	197
14.1.	Prime proprietà della trasformata di Laplace	197
14.2.	Calcolo di trasformate	207
14.3.	Applicazioni della trasformata di Laplace ad equazioni differenziali ordinarie ed equazioni integro-differenziali	214
14.3.1.	<i>Equazioni differenziali ordinarie lineari     a coefficienti costanti</i>	214
14.3.2.	<i>Esempi di equazioni integrodifferenziali</i>	219
14.3.3.	<i>Equazioni differenziali ordinarie lineari     a coefficienti polinomiali</i>	221
<b>Cap. 15.</b>	<b>LA TRASFORMATATA DI FOURIER</b>	228
15.1.	Osservazioni sulle formule di trasformazione e antitrasformazione. Calcolo di trasformate.	228
15.2.	Formule delle derivate	235
15.3.	La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$	237
15.4.	Trasformata di Fourier e convoluzione	239
15.5.	Autovalori e autofunzioni di $\mathcal{Y}$ su $L^1(\mathbb{R})$	243
15.6.	Calcolo di trasformate mediante metodi di analisi complessa	246

15.7.	Relazione tra trasformata di Fourier e di Laplace. Antitrasformata di Laplace	250
15.8.	Soluzioni di equazioni differenziali ordinarie ed equazioni di convoluzione mediante trasformate Grafici	257 264

## Parte III.

### Equazioni a derivate parziali

<b>Cap. 16.</b>	<b><i>EQUAZIONI QUASILINEARI DEL "9 ORDINE</i></b>	274
16.1.	Risoluzione del problema di Cauchy per equazioni quasilineari del 1° ordine	274
16.2.	Equazioni lineari	281
16.3.	Equazioni omogenee	284
16.4.	Equazioni quasilineari che modellizzano problemi di traffico	288
<b>Cap. 17.</b>	<b><i>CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL #9 ORDINE IN # VARIABILI</i></b>	298
17.1.	Il caso iperbolico	299
17.2.	Il caso parabolico	302
17.3.	Il caso ellittico	306
17.4.	Il problema di Cauchy per un'equazione iperbolica	308
<b>Cap. 18.</b>	<b><i>IL LAPLACIANO IN DUE DIMENSIONI</i></b>	314
18.1.	Il problema di Dirichlet nel cerchio	314
18.2.	Altri problemi per il laplaciano in coordinate polari	318
18.3.	L'equazione di Poisson nel cerchio	323
18.4.	L'equazione di Laplace nel rettangolo	328
18.5.	L'equazione di Laplace nel semipiano	330
18.6.	Relazione tra il nucleo di Poisson nel semipiano e nel cerchio Grafici	333 335

<b>Cap. 19.</b>	<b><i>IL LAPLACIANO IN COORDINATE SFERICHE. ARMONICHE SFERICHE</i></b>	340
19.1.	L'equazione di Laplace in coordinate sferiche. Separazione delle variabili	340
19.2.	Il problema di Dirichlet sulla sfera con dato indipendente dalla longitudine	342
19.3.	Il problema di Dirichlet sulla sfera nel caso generale. Armoniche sferiche	346
<b>Cap. 20.</b>	<b><i>L'EQUAZIONE DEL CALORE IN UNA DIMENSIONE</i></b>	355
20.1.	Il caso della sbarra finita	355
20.1.1.	<i>Equazione omogenea con condizioni agli estremi omogenee</i>	355
20.1.2.	<i>Il caso della conducibilità non costante</i>	359
20.1.3.	<i>Equazione non omogenea</i>	363
20.1.4.	<i>Condizioni agli estremi dipendenti dal tempo</i>	365
20.2.	Problemi per l'equazione del calore sulla retta	371
20.2.1.	<i>L'equazione omogenea</i>	371
20.2.2.	<i>L'equazione non omogenea</i>	373
20.3.	Problemi per l'equazione del calore sulla semiretta	374
20.3.1.	<i>Condizioni omogenee all'estremo</i>	374
20.3.2.	<i>Condizioni all'estremo dipendenti dal tempo</i> Grafici	376 378
<b>Cap. 21.</b>	<b><i>L'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE</i></b>	385
21.1.	Il problema di Cauchy sulla retta	385
21.2.	La corda vibrante con uno o due estremi fissati: metodi di riflessione	390
21.3.	Decomposizione in armoniche per la vibrazione di una corda fissata agli estremi	395
21.4.	Corda vibrante con condizioni agli estremi dipendenti dal tempo Grafici	399 405
<b>Cap. 22.</b>	<b><i>PROBLEMI AI LIMITI PER L'EQUAZIONE DELLE ONDE O DEL CALORE IN PIÚ DIMENSIONI. L'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ</i></b>	412
22.1.	Separazione delle variabili in problemi ai limiti per l'equazione delle onde o del calore	412
22.2.	La membrana vibrante rettangolare	417
22.3.	La membrana vibrante circolare Grafici	422 429

<b>Cap. 23.</b>	<b><i>FUNZIONI DI BESSEL E APPLICAZIONI</i></b>	433
23.1.	Equazioni di Bessel e loro integrale generale	433
23.2.	Equazioni e funzioni di Bessel modificate	439
23.3.	Andamento delle funzioni $J_n$ e $Y_n$	440
23.4.	Funzioni di Bessel di ordine semiintero	444
23.5.	Funzioni di Bessel come sistemi ortonormali	446
23.6.	Applicazioni delle funzioni di Bessel a problemi per equazioni a derivate parziali	450
23.6.1.	<i>Equazione di Helmholtz sul cilindro</i>	451
23.6.2.	<i>Laplaciano sul cilindro</i>	453
23.6.3.	<i>Equazione di Helmholtz sulla sfera</i>	455
	Grafici e tabelle	458
	<b><i>RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI</i></b>	468