

---

## Prefazione

Questo testo raccoglie esercizi adatti a corsi di Analisi Matematica 1 per la laurea in Ingegneria o affini. Si tratta perlopiù di esercizi che ho utilizzato per i temi d'esame di questi corsi negli ultimi dieci anni al Politecnico di Milano. L'impostazione seguita è quella del libro di testo:

**Bramanti-Pagani-Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2008**, nel seguito indicato con [BPS1].

Gli esercizi sono raggruppati per argomenti, secondo capitoli che seguono la stessa scansione del libro di testo; ogni capitolo è suddiviso in paragrafi (numerati) e sezioni (contrassegnate da lettere). Le soluzioni degli esercizi sono riportate alla fine di ciascun *paragrafo*.

Degli esercizi contrassegnati con ★ è fornito lo svolgimento completo; di tutti gli altri sono fornite le soluzioni, in modo che lo studente possa sempre controllare la correttezza del proprio operato.

Rispetto al mio precedente "Esercizi di calcolo infinitesimale e algebra lineare", questo testo si differenzia, oltre che per il maggior numero di esercizi, per il taglio, che vuole essere simile a quello di un percorso di esercitazioni in aula. Ogni argomento importante è introdotto con un gruppo di esempi svolti dettagliatamente e commentati con osservazioni didattiche, che precedono gli esercizi proposti. A volte queste parti introduttive assumono l'aspetto di vere e proprie (brevi) lezioni su un argomento, come nel caso dei richiami sull'uso dei simboli di "asintotico" e "o piccolo", argomenti che per loro natura si prestano ad essere sviluppati nelle esercitazioni.

Tutto ciò dovrebbe servire di guida e orientamento per lo studente, in particolare per chi, e sono sempre tanti, non ha seguito le lezioni e le esercitazioni, o non le ha seguite studiando costantemente, e si trova così ad affrontare la preparazione dell'esame un po' da autodidatta. Certamente lo studio del libro di testo dev'essere il punto di partenza della preparazione dell'esame, *anche della prova scritta*. Perciò in questo eserciziario si presuppone che, nel momento in cui lo studente affronta un certo capitolo, abbia già studiato il capitolo corrispondente sul libro di testo, compreso gli esempi svolti, ed abbia già provato a svolgere almeno parte degli esercizi lì riportati. Il percorso di esercitazioni qui presentato dovrebbe essere un utile supporto e consolidamento per chi ha seguito bene il corso e aiutare tutti gli altri a recuperare ciò che si sono persi non frequentando attivamente.

Chi utilizzerà questo libro a fondo, troverà che alcuni esercizi sono piuttosto simili tra loro; ritengo che questo non sia un difetto in un percorso di esercitazioni, in quanto a tutti noi una certa dose di ripetizione è necessaria in fase di apprendimento. D'altro canto rifare *esattamente* lo stesso esercizio serve poco in matematica, perché inevitabilmente la memoria del procedimento e del risultato "spegne" in noi il ragionamento: dunque la *piccola variazione* ha un suo valore didattico.

Un'ultima osservazione riguarda i grafici di funzione inseriti in questo testo. Il lettore noterà che, quanto all'aspetto, sono di due tipi diversi. Alcuni (riconoscibili per il tratto più sottile) sono stati prodotti con un software matematico e rappresentano il grafico in scala, "esatto" (nei limiti dell'approssimazione che il software consente); altri sono stati tracciati "a mano libera" (sia pure con l'ausilio di un programma di grafica). Questi ultimi, di proposito, non sono affatto in scala, per mostrare meglio le caratteristiche importanti del grafico (punti di flesso, angolosi, a tangente verticale, ecc.), che talvolta un grafico esatto rende praticamente invisibili, a motivo della diversa scala su cui questi fenomeni si presentano: è questo grafico a mano libera e non in scala quello che spesso risulta più utile in uno studio di funzione.

Ringrazio colleghi e studenti che con i loro commenti sulle precedenti edizioni mi hanno aiutato a migliorare il materiale confluito in questo testo. Sono sempre graditi commenti o segnalazioni di errori, all'indirizzo:

marco.bramanti@polimi.it

Segnalo infine che alla pagina web:

<http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/esercitazioni.htm>

è disponibile ulteriore materiale riguardante questo libro e, se questa iniziativa si rivelerà utile, la pagina nel tempo potrà essere aggiornata e incrementata.

M. B.

Milano, luglio 2011

# Sommario

<b>Test di autovalutazione sui prerequisiti per il corso di Analisi Matematica 1.....</b>	<b>1</b>
<b>Altri esercizi sui prerequisiti.....</b>	<b>2</b>
Soluzioni del test e degli esercizi sui prerequisiti.....	4
<b>Cap. 1. I numeri.....</b>	<b>7</b>
1.1. Argomenti introduttivi.....	7
1.1.A. Insiemi e logica.....	7
1.1.B. Sommatorie e coefficienti binomiali.....	8
1.1.C. Numeri reali, ordinamento, estremo superiore.....	10
Soluzioni § 1.1.....	13
1.2. Numeri complessi.....	15
1.2.A. Concetti di base: forma algebrica e trigonometrica, operazioni sui numeri complessi.....	15
1.2.B. Equazioni nel campo complesso.....	22
Soluzioni § 1.2.....	33
<b>Cap. 2. Funzioni di una variabile reale.....</b>	<b>49</b>
2.1. Grafici delle funzioni elementari.....	49
Soluzioni § 2.1.....	51
2.2. Funzioni composte e proprietà elementari delle funzioni.....	56
Soluzioni § 2.2.....	66
2.3. Operazioni sui grafici di funzioni.....	71
Soluzioni § 2.3.....	77
<b>Cap. 3. Limiti e continuità.....</b>	<b>101</b>
3.1. Concetti di base sui limiti di successioni.....	101
3.1.A. Proprietà delle successioni.....	101
3.1.B. Calcolo dei limiti con tecniche di base.....	104
Soluzioni § 3.1.....	110
3.2. Concetti di base su limiti di funzioni, asintoti, continuità.....	116
3.2.A. Limiti di funzioni elementari.....	117
3.2.B. Definizione di limite.....	117
3.2.C. Limiti elementari di funzioni composte. Non esistenza del limite.....	119
Soluzioni § 3.2.....	124

---

3.3.	Calcolo dei limiti mediante stime asintotiche e limiti notevoli.....	128
3.3.A.	Richiami sull'utilizzo del simbolo di asintotico.....	128
3.3.B.	Richiami sulla gerarchia degli infiniti.....	141
3.3.C.	Calcolo di limiti mediante limiti notevoli e stime asintotiche.	144
	Soluzioni § 3.3.....	157
3.4.	Applicazioni agli studi di funzione.....	164
3.4.A.	Grafici qualitativi elementari.....	164
3.4.B.	Stime asintotiche e grafici locali.....	172
3.4.C.	Studio all'infinito e ricerca degli asintoti obliqui.....	181
3.4.D.	Studi di funzione mediante limiti e stime asintotiche.....	184
	Soluzioni § 3.4.....	191
<b>Cap. 4. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile.....</b>		<b>219</b>
4.1.	Calcolo delle derivate.....	219
4.1.A.	Algebra delle derivate.....	219
4.1.B.	Retta tangente e linearizzazione.....	222
4.1.C.	Derivata della funzione inversa.....	223
	Soluzioni § 4.1.....	228
4.2.	Studio dei punti di non derivabilità.....	238
	Soluzioni § 4.2.....	243
4.3.	Studio del grafico di una funzione.....	250
	Soluzioni § 4.3.....	270
4.4.	Teorema di De L'Hospital e formula di Taylor.....	328
4.4.A.	Il Teorema di De L'Hospital.....	328
4.4.B.	Richiami sul simbolo di "o piccolo".....	336
4.4.C.	Scrittura di sviluppi di Taylor-MacLaurin immediati.....	342
4.4.D.	Calcolo di limiti e parti principali mediante sviluppi di MacLaurin e applicazioni.....	346
4.4.E.	Calcolo di limiti utilizzando il calcolo differenziale.....	357
4.4.F.	Sviluppo di MacLaurin di una funzione composta.....	366
	Soluzioni § 4.4.....	372
4.5.	Applicazioni al calcolo numerico approssimato: metodo di Newton e formula di Taylor con resto secondo Lagrange.....	399
4.5.A.	Richiami sul metodo di Newton.....	399
4.5.B.	Calcoli numerici approssimati mediante la formula di Taylor	403
	Soluzioni § 4.5.....	405
<b>Cap. 5. Serie.....</b>		<b>411</b>
5.1.	Serie numeriche.....	411
5.1.A.	Serie a termini positivi.....	411
5.1.B.	Serie a termini di segno variabile.....	415

---

5.1.C. Esercizi sulle serie a termini positivi o di segno variabile.....	417
5.1.D. Esercizi sulle serie che utilizzano il calcolo differenziale.....	420
Soluzioni § 5.1.....	423
5.2. Serie di Taylor ed esponenziale complesso.....	441
Soluzioni § 5.2.....	443
<b>Cap. 6. Calcolo integrale per funzioni di una variabile.....</b>	<b>445</b>
6.1. Calcolo di integrali indefiniti e definiti.....	445
6.1.A. Integrali immediati.....	446
6.1.B. Integrazione di funzioni razionali.....	449
6.1.C. Integrazione per parti.....	455
6.1.D. Integrazione di funzioni trigonometriche.....	460
6.1.E. Integrazione di funzioni irrazionali.....	465
6.1.F. Simmetrie e valori assoluti nel calcolo di integrali definiti.....	471
6.1.G. Esercizi di riepilogo.....	473
Soluzioni §6.1.....	478
6.2. Integrali generalizzati.....	506
Soluzioni §6.2.....	512
6.3. Funzioni integrali.....	516
6.3.A. Insieme di definizione di una funzione integrale.....	516
6.3.B. Regolarità di una funzione integrale.....	519
6.3.C. Grafico della funzione integrale dedotto dal grafico della funzione integranda.....	520
6.3.D. Comportamento all'infinito di una funzione integrale. Studio di funzione integrale.....	524
Soluzioni §6.3.....	528
<b>Indicazioni bibliografiche di base.....</b>	<b>541</b>