

---

## Prefazione

Questo testo raccoglie esercizi adatti a corsi di Analisi Matematica 2 per la laurea in Ingegneria o affini. Si tratta perlopiù di esercizi che ho utilizzato per i temi d'esame di questi corsi negli ultimi dieci anni al Politecnico di Milano. L'impostazione seguita è quella del libro di testo:

**Bramanti-Pagani-Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2009**, nel seguito indicato con [BPS2]. Si farà riferimento talvolta anche al testo

**Bramanti-Pagani-Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2008**, indicato con [BPS1], come pure all'eserciziario

**Bramanti: Esercitazioni di Analisi Matematica 1. Progetto Leonardo, 2011**, indicato con [B1].

Come in [B1], gli esercizi sono raggruppati per argomenti, secondo capitoli che seguono la stessa scansione del libro di testo; ogni capitolo è suddiviso in paragrafi (numerati) e sezioni (contrassegnate da lettere). Le soluzioni degli esercizi sono riportate alla fine di ciascun *paragrafo*.

Degli esercizi contrassegnati con ★ è fornito lo svolgimento completo; di tutti gli altri sono fornite le soluzioni (e spesso anche qualcosa di più), in modo che lo studente possa sempre controllare la correttezza del proprio operato.

Rispetto al mio precedente "Esercizi di calcolo infinitesimale e algebra lineare" (Progetto Leonardo, 2005), questo testo si differenzia, oltre che per il maggior numero di esercizi, per il taglio, che vuole essere simile a quello di un percorso di esercitazioni in aula. Ogni argomento importante è introdotto con un gruppo di esempi svolti dettagliatamente e commentati con osservazioni didattiche, che precedono gli esercizi proposti. A volte queste parti introduttive assumono l'aspetto di vere e proprie (brevi) lezioni su un argomento, come nel caso dei richiami sull'uso dell'esponenziale complesso o della rappresentazione di insiemi del piano definiti da sistemi di equazioni o disequazioni, argomenti che per loro natura si prestano ad essere sviluppati nelle esercitazioni.

Tutto ciò dovrebbe servire di guida e orientamento per lo studente, in particolare per chi, e sono sempre tanti, non ha seguito le lezioni e le esercitazioni, o non le ha seguite studiando costantemente, e si trova così ad affrontare la preparazione dell'esame un po' da autodidatta. Certamente lo studio del libro di testo dev'essere il punto di partenza della preparazione dell'esame, *anche della prova scritta*. Perciò in questo eserciziario si presuppone che, nel momento in cui lo studente affronta un certo capitolo, abbia già studiato il capitolo corrispondente sul libro di testo, compresi gli esempi svolti, ed abbia già provato a svolgere almeno parte degli esercizi lì riportati. Il percorso di esercitazioni qui presentato dovrebbe essere un utile supporto e consolidamento per chi ha seguito bene il

corso e aiutare tutti gli altri a recuperare ciò che si sono persi non frequentando attivamente.

Un discorso a parte meritano gli esempi ed esercizi raccolti in paragrafi di "applicazioni fisiche", presenti in vari capitoli. Rispetto al corso di Analisi 1, il programma di Analisi 2 è molto più ricco di argomenti aventi un importante significato fisico e questo, soprattutto se il corso è rivolto a studenti di ingegneria, è un elemento che io ritengo qualificante per il corso stesso. Credo che sviluppare esercizi ed esempi di questo tipo sia importante per lo studente, per diverse ragioni: acquisire la comprensione del significato fisico dei concetti matematici, essere più motivati nello studio della matematica, ma soprattutto cogliere *il nesso* tra matematica e fisica, vedere all'opera la potenza della deduzione matematica finalizzata alla descrizione, spiegazione e previsione dei fenomeni fisici.

Perciò ho inserito in questo testo con una certa ampiezza esempi ed esercizi di questo tipo, sviluppati in dettaglio, ben sapendo che solo in parte questi saranno funzionali alla preparazione dell'esame di analisi 2, ma non volendo rinunciare ad offrire allo studente la possibilità di allargare l'orizzonte in questo senso.

Ringrazio colleghi e studenti che con i loro commenti sulle precedenti edizioni mi hanno aiutato a migliorare il materiale confluito in questo testo. Sono sempre graditi commenti o segnalazioni di errori, all'indirizzo:

marco.bramanti@polimi.it

Segnalo infine che alla pagina web:

<http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/esercitazioni.htm>

potrà essere reso disponibile ulteriore materiale riguardante questo libro.

M. B.

Milano, gennaio 2012

## Sommario

<b>Test di autovalutazione sui prerequisiti per il corso di analisi matematica 2...</b>	<b>1</b>
Soluzioni esercizi sui prerequisiti.....	4
<b>Cap. 1. Equazioni differenziali.....</b>	<b>7</b>
1.1. Equazioni del prim'ordine.....	7
1.1.A. Equazioni lineari o a variabili separabili.....	7
1.1.B. Applicazioni.....	24
Soluzioni §1.1.....	31
1.2. Equazioni lineari del second'ordine.....	59
1.2.A. Richiami sull'esponenziale complesso.....	59
1.2.B. Equazioni omogenee a coefficienti costanti.....	63
1.2.C. Equazioni non omogenee. Metodo di somiglianza.....	67
1.2.D. Equazioni di Eulero.....	83
1.2.E. Applicazioni fisiche.....	88
Soluzioni §1.2.....	106
<b>Cap. 2. Calcolo infinitesimale per le curve.....</b>	<b>133</b>
2.1. Calcolo differenziale vettoriale. Curve continue, regolari.....	133
Soluzioni §2.1.....	143
2.2. Lunghezza di un arco di curva e integrali di linea di prima specie.....	153
Soluzioni §2.2.....	170
2.3. Applicazioni fisiche.....	192
<b>Cap. 3. Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili.....</b>	<b>201</b>
3.1. Grafici e insiemi di livello.....	201
Soluzioni §3.1.....	204
3.2. Limiti e continuità per funzioni di più variabili.....	211
Soluzioni §3.2.....	223
3.3. Topologia e proprietà delle funzioni continue.....	229
3.3.A. Insiemi del piano definiti da equazioni o disequazioni.....	229
3.3.B. Topologia.....	235
Soluzioni §3.3.....	243
3.4. Derivate parziali e differenziabilità.....	264
3.4.A. Calcolo di derivate parziali, piano tangente.....	264
3.4.B. Derivabilità, differenziabilità, derivate direzionali.....	269
3.4.C. Derivazione di funzioni composte.....	285
Soluzioni §3.4.....	288
3.5. Derivate successive.....	314

---

Soluzioni §3.5.....	317
3.6. Massimi e minimi liberi.....	321
Soluzioni §3.6.....	332
3.7. Funzioni definite implicitamente.....	352
Soluzioni §3.7.....	357
3.8. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatore di Lagrange.....	363
Soluzioni §3.8.....	368
3.9. Applicazioni fisiche ed esercizi vari.....	380
Soluzioni §3.9.....	385
<b>Cap. 4. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili</b>	
<b>a valori vettoriali.....</b>	<b>391</b>
4.1. Superfici regolari parametrizzate.....	392
4.1.A. Superfici in forma parametrica.....	392
4.1.B. Superfici in forma cartesiana.....	394
4.1.C. Superfici di rotazione.....	395
Soluzioni §4.1.....	399
4.2. Trasformazioni regolari di coordinate.....	405
4.2.A. Trasformazioni di coordinate e di operatori differenziali.....	405
4.2.B. Applicazioni alle equazioni a derivate parziali.....	408
Soluzioni §4.2.....	414
<b>Cap. 5. Calcolo integrale per funzioni di più variabili.....</b>	<b>425</b>
5.1. Integrali doppi.....	425
5.1.A. Rappresentazione analitica di insiemi del piano.....	425
5.1.B. Tecniche di base e calcolo di integrali doppi come integrali iterati.....	431
5.1.C. Calcolo di integrali doppi con cambi di variabili.....	436
5.1.D. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali doppi ed esercizi vari.....	440
Soluzioni §5.1.....	451
5.2. Integrali tripli.....	470
5.2.A. Rappresentazione analitica di insiemi dello spazio.....	470
5.2.B. Tecniche di base per integrali tripli. Integrazione "per fili" o "per strati". Cambi di variabile.....	475
5.2.B. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali tripli.....	481
Soluzioni §5.2.....	488
<b>Cap. 6. Campi vettoriali.....</b>	<b>507</b>
6.1. Lavoro di un campo vettoriale, campi conservativi e potenziali.....	507
6.1.A. Lavoro di un campo vettoriale.....	508

---

6.1.B.	Campi conservativi e potenziali.....	514
6.1.C.	Esercizi vari su lavoro di un campo, campi conservativi e potenziali.....	518
	Soluzioni §6.1.....	522
6.2.	Area e integrali di superficie.....	539
6.2.A.	Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali di superficie.....	541
6.2.B.	Esercizi vari.....	544
	Soluzioni §6.2.....	547
6.3.	Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.....	555
	Soluzioni §6.3.....	564
6.4.	Teoremi di Gauss, Green, Stokes.....	570
6.4.A.	Calcolo differenziale con gli operatori divergenza e rotore....	570
6.4.B.	Formule di Gauss-Green nel piano.....	577
6.4.C.	Teoremi della divergenza e del rotore.....	578
6.4.D.	Applicazioni fisiche dei teoremi di Gauss e Stokes.....	584
6.4.E.	Applicazioni matematiche del teorema di Gauss.....	596
6.4.F.	Dimostrazione del teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ e conseguenze....	599
	Soluzioni §6.4.....	608
<b>Cap. 7. Serie di potenze e serie di Fourier.....</b>		<b>629</b>
7.1.	Serie di funzioni e convergenza totale.....	629
	Soluzioni §7.1.....	633
7.2.	Serie di potenze.....	635
	Soluzioni §7.2.....	637
7.3.	Serie trigonometriche e serie di Fourier.....	640
7.3.A.	Polinomi trigonometrici.....	640
7.3.B.	Periodizzazione, regolarità di funzioni periodizzate.....	642
7.3.C.	Serie di Fourier: convergenza puntuale e rapidità di convergenza a zero dei coefficienti.....	644
7.3.D.	Forma esponenziale complessa delle serie di Fourier.....	653
7.3.E.	Serie trigonometriche.....	654
7.3.F.	Applicazioni fisiche delle serie di Fourier.....	656
	Soluzioni §7.3.....	664