Si può insegnare a ragionare?

Marco Bramanti

Testo esteso preparato per l'intervento all'Università di Catania, nell'ambito del Progetto MAT-ITA 2016/17

PER UNA DIDATTICA CONGIUNTA SCUOLA-UNIVERSITÀ
Potenziamento delle competenze linguistiche e matematiche per studenti delle scuole secondarie di II grado e prevenzione degli O.F.A. al primo anno del percorso universitario.

22 Febbraio 2017

Premessa. Si può insegnare a ragionare?

Il tema del ragionamento per un matematico ha una serie di declinazioni molto specifiche legate alla sfera logico-matematica, che naturalmente non esauriscono l'ambito del ragionamento né tantomeno quello della ragione. Sapendo di trovarmi di fronte a un pubblico di docenti di Italiano e di Matematica, ho cercato di tenere la relazione su temi il più possibile generali, nella speranza che suggeriscano qualcosa di utile a tutti. Cercherò di esemplificare le affermazioni generali in modo che non sembrano affermazioni generiche e vaghe, cosa che non vogliono essere. Inevitabilmente il discorso conterrà anche delle affermazioni specifiche che riguardano la matematica, e me ne scuso con i docenti di Italiano[1].

Noi insegnanti vorremmo educare a usare la ragione. Come si fa? E' la cosa più difficile, e ogni disciplina può avere metodi diversi. In generale, l'esito dell'insegnamento non è mai garantito, ma questo non significa che non si può insegnare. Quindi: si può insegnare a ragionare? Non so se si può, ma *si deve* insegnare a ragionare. Intendo dire che non c'è un metodo che garantisce che tutti imparino a ragionare bene (questo non dipende solo da noi), ma non possiamo farcene una scusa per non fare del nostro meglio per insegnare a ragionare.
Faccio due osservazioni generali introduttive.
-Insegnare a ragionare, insegnare il metodo di una certa disciplina, richiede nell'insegnante anzitutto una *consapevolezza* del metodo stesso, che è qualcosa di più della *padronanza* del metodo. Non basta che io ragioni bene, occorre che sia diventato consapevole dei modi, delle forme del mio ragionare; occorre una riflessione e un'esperienza di introspezione, coltivata per il piacere di capire che cosa è servito a me per capire, qual era l'origine della mia incomprensione, del mio errore, che cosa mi aiuta a fare passi veloci, che cosa mi rallenta. (Come il piacere di fermarsi a gustare il panorama dalla vetta, dopo la fatica della salita, e prima di scendere: un momento in cui si sospende il cammino per osservare dall'alto i passi del cammino). Poi certamente occorre la capacità di immedesimazione, il desiderio e l'attenzione di capire il ragionamento dell'altro, la fatica altrui, l'errore o il fraintendimento altrui, e che cosa invece aiuta la persona che ho davanti a capire, cosa la mette in moto. Tutto questo è un lavoro che avviene *dentro* l'insegnante, anche se nel rapporto con gli allievi.
-Poi c'è il lavoro che l'insegnante fa in aula, quindi *con* gli allievi, e il lavoro che sollecita *negli* allievi. Penso che il metodo, il ragionare, non si insegni *esclusivamente* dando il buon esempio di "metodo in azione"; questo è necessario, ma *non è l'unica arma* che abbiamo. Abbiamo anche la possibilità di fare un lavoro espressamente mirato ad aiutare l'affinamento del metodo in chi abbiamo davanti. Un tempo espressamente dedicato ad un lavoro sul metodo, sul ragionamento.

[1] Questa relazione è una rivisitazione di materiale presente in vari miei articoli precedenti, in particolare [B2] e [B5].

Comunque, sintetizzando, il lavoro dell'insegnare a ragionare, tanto necessario quanto dagli esiti non garantiti, si declina in due temi, o se vogliamo ha due strumenti, che in parole povere possiamo esprimere così:
-il buon esempio da parte dell'insegnante di metodo corretto in azione;
-il lavoro con gli studenti e degli studenti specificamente mirato alla coltivazione del metodo.
Ancora più in sintesi: buon esempio e esercizio mirato. Cercherò di dire qualcosa su entrambi questi temi.

Ma prima di questo faccio un'altra osservazione generale. Ogni insegnante sa che, nell'insegnamento e apprendimento di qualsiasi cosa, non ci sono in gioco solo la capacità e le conoscenze (dell'allievo e del docente). Ci sono in gioco anche la volontà, l'interesse, la curiosità, la passione (di chi apprende e di chi insegna). Sappiamo bene che uno studente svogliato e che non è disposto a farsi coinvolgere lascerà scivolare su di sé qualsiasi lezione come acqua sulla pietra. Con uno studente appassionato a una materia ma dai rendimenti scarsi si può lavorare per migliorare i rendimenti, ma con uno studente totalmente disinteressato alla materia non si può lavorare. Allora quel che ho chiamato "buon esempio da parte del docente di metodo in azione" si allarga necessariamente di significato: non è solo buon esempio di ragionamento. Direi piuttosto che un docente può e dovrebbe essere un buon esempio di *uso appassionato della ragione*. Quest'espressione indica un duplice allargamento dell'orizzonte: dal ragionamento tecnico specifico della disciplina all'uso più generale della ragione, che investe tutto: dal modo in cui il docente pianifica il lavoro dell'anno, la successione degli argomenti del programma, il modo di svolgerli, il contenuto delle verifiche, al modo con cui il docente cerca e mostra nessi tra la propria disciplina e le altre, e soprattutto tra la propria disciplina e la realtà, al modo in cui si relaziona con gli studenti, i colleghi e la scuola: tutto è esempio di uso della ragione, che può colpire oppure no lo studente svogliato. Il secondo allargamento è segnalato dal termine "appassionato": la passione del docente segnala anche allo studente che nell'apprendimento c'è in gioco la ragione in relazione a tutta la persona con i suoi interessi.

Passerò allora in rassegna alcuni aspetti concreti di questo uso appassionato della ragione da parte dell'insegnante. Per quanto i prossimi temi forse in apparenza ci allontanino dal tema specifico dell'insegnare a ragionare, in realtà ne sono a mio parere premessa necessaria e parte integrante.

A. Coscienza del valore di ciò che si insegna

Trasmettere interesse e passione per una disciplina evidentemente presuppone che nel docente ci sia e sia evidente la coscienza del valore di quella disciplina. E questo non è scontato, purtroppo. "Valore di ciò che si insegna" significa sia una stima della disciplina in senso generale, per le sue caratteristiche di fondo, sia la stima per gli specifici contenuti oggetto dell'insegnamento: chi pensa "la mia materia è bella, ma con queste quattro cose che si insegnano a scuola cosa vuoi fare..." non può trasmettere passione.
Mi soffermo allora sinteticamente, per quanto riguarda la matematica, su certi elementi oggettivi che meritano la nostra stima.

Anzitutto la matematica è uno dei grandi metodi di conoscenza, ossia una delle grandi strade di ricerca del vero, che l'umanità ha creato, a fianco del metodo filosofico, di quello scientifico, e così via. Queste strade non sono naturalmente alternative tra loro, ognuna ha valore nel suo ambito.
Il metodo matematico è maturato e si è definito almeno 2300 anni fa, con Euclide, ha quindi il respiro della storia, ed ha alcune caratteristiche che possono essere interessanti per tutti.
1. La prima è la *capacità di generare un vastissimo accordo tra le persone*: quando un matematico dimostra un teorema, gli altri accettano il suo risultato. E se qualcuno (ogni tanto accade) trova un errore nella dimostrazione dell'autore, l'autore ammetterà di aver sbagliato. In quale altra disciplina

si assiste normalmente a questo spettacolo? Ci siamo un po' assuefatti a questo fatto. Quando diciamo "in matematica due più due fa quattro" diciamo in modo un po' sempliciotto questa grande verità: che in matematica è normale essere d'accordo su ciò che è vero e ciò che è falso –che non vuol dire "in matematica non si discute!"-. Sarebbe giusto stupircene.
2. Un'altra caratteristica interessante della matematica è quella di essere un sapere che nel tempo cresce cumulativamente: in matematica nessuna rivoluzione ci fa buttar via le acquisizioni precedenti. La matematica è una tradizione vivente, in cui il progresso dell'oggi si basa su tutta la tradizione precedente. Questo *legame strettissimo tra progresso e tradizione*, che in qualche misura è propria di ogni regione della cultura, in matematica è particolarmente evidente.
Quindi: un vastissimo accordo tra le persone, che attraversa il tempo oltre che lo spazio.
Un esempio semplice su questi due primi punti: nella prima settimana del mio corso universitario di analisi 1, nei discorsi introduttivi sugli insiemi numerici, tra le altre cose presento il teorema classico che afferma l'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato, e lo dimostro seguendo il ragionamento che Euclide scrive nei suoi "Elementi" 2300 anni fa: quell'argomentazione convince i miei studenti come convinceva 2300 anni fa i discepoli di Euclide. E quel risultato non lo presento come curiosità storica, ma è un tassello logico strettamente funzionale al contenuto del mio corso universitario di analisi matematica 1, che si svolge 2300 anni dopo Euclide. Che spettacolo è mai questo? Ci rendiamo conto della singolarità e del valore della matematica nel panorama delle attività umane, se riesce a generare questo consenso che attraversa tempo e spazio e questo legame tra progresso e tradizione? Si rifletta quindi sul *valore fondamentale della dimostrazione* nell'insegnamento della matematica a scuola e, per inciso, sul valore della *conoscenza di un po' di storia della matematica* nell'insegnamento.
3. Un'altra caratteristica della matematica che merita la nostra stima è un apparente paradosso: la matematica è la disciplina astratta per eccellenza, eppure la matematica ha un'incredibile efficacia nell'aiutarci a descrivere, comprendere, prevedere i fenomeni naturali, fisici. Da quando esiste la scienza moderna, c'è un sodalizio stabile tra matematica e scienze fisiche, un'alleanza feconda per entrambe. La storia della matematica documenta continuamente questo paradosso: nessun risultato è troppo astratto, nessuna generalizzazione troppo ardita per non poter essere utile a qualcosa di concreto. *L'astrazione non è affatto nemica del rapporto con la realtà, ma è anzi uno dei modi in cui noi scopriamo cosa c'è di profondamente comune in realtà concrete molto diverse tra loro*.

Riflettiamo sull'insegnamento della matematica e fisica nel triennio dei licei: usare un po' di matematica in fisica (ad esempio, quando in quinta si conosce il calcolo differenziale, ritornare su certi concetti di fisica degli anni precedenti mostrando la potenza che lo strumento matematico ha in quell'ambito), non significa renderla più difficile ma restituirle il suo carattere, e mostrare la potenza di presa sulla realtà che ha l'astrazione matematica. Non si tratta di avere l'affanno di mostrare che la matematica è utile, o di sottintendere che la matematica vale perché è utile, quanto di illustrare come l'astratto, che ha di per sé un suo fascino razionale, non è nemico del rapporto con la realtà.[2] Da questo nasce qualche altra raccomandazione concreta agli insegnanti di matematica e fisica: una progettazione unitaria dei percorsi di matematica e fisica in cui le due materie si valorizzino a vicenda, e –di nuovo- un po' di conoscenza e di presentazione della storia del pensiero scientifico, come aiuto alla comprensione del significato stesso dei concetti che insegniamo. Un insegnante di matematica di liceo deve conoscere la fisica anche se non la insegna, e deve conoscere qualche sviluppo della matematica (successivo alla nascita del calcolo infinitesimale) che, pur andando oltre ciò che si insegna a scuola, mostra le direzioni che ha preso la matematica negli ultimi 300 anni.

Questi sono pochi (ma secondo me significativi) spunti del valore della matematica in quanto tale, di ciò per cui questa merita la mia stima: la capacità di generare accordo tra le persone attorno a ciò che è vero, attraverso tempo e spazio; l'alleanza tra progresso e tradizione; l'alleanza tra astrazione e comprensione profonda della realtà concreta. Ho già accennato a qualche esempio di come questi elementi si possono documentare e trasmettere nell'insegnamento. Come dicevo, questa stima deve poi declinarsi nella coscienza del valore delle singole discipline matematiche insegnate. Su questo tornerò in seguito.

[2] Per approfondire il tema e il valore dell'astrazione in matematica –e non solo- rimando all'articolo [B3].

B. Stima per la dimensione linguistica della ragione

Introduco questo tema con un citazione di un linguista:

> "L'importanza della dimensione linguistica per la ragione è, dunque, estremamente rilevante. Per curarla l'insegnante dovrebbe rispettare il principio dell'adeguatezza categoriale. Infatti spesso il problema non è che un giudizio sia falso in quanto contraddice la realtà in modo diretto, affermando l'opposto; ma è falso perché la categorialità che usa è così povera che tradisce l'esperienza. Pertanto la cura della categorialità, la specificità del termine, l'aderenza all'esperienza, cioè l'aderenza della parola all'esperienza, sono assolutamente fondamentali. L'inadeguatezza categoriale ci allontana di più dalla realtà della stessa falsità, perché, in fondo, se nego (capovolgo) il falso ottengo il vero, ma se uso un concetto inadeguato, il rapporto con la realtà mi sfugge: "La verità emerge più presto dall'errore che dalla confusione" ".
> E. Rigotti, v. [Ri], p.116. La citazione finale è di F. Bacone, Novum Organum.

La cura della correttezza e precisione del linguaggio è evidentemente un aspetto fondamentale in ogni disciplina, dall'Italiano alla Matematica, e ho volutamente posto questo problema con una citazione proveniente dall'ambito umanistico. Giudizi e ragionamenti si appoggiano in modo essenziale al linguaggio, in ogni ambito. In particolare, il ragionamento matematico coinvolge inesorabilmente il *linguaggio logico-matematico*: proposizioni, proprietà, variabili, quantificatori. E' parte di quell'uso appassionato della ragione da parte dell'insegnante, di cui ho parlato, la cura di questo tipo di linguaggio, prima di tutto nell'insegnante stesso e poi negli studenti. Questo è un punto che coinvolge e richiede sia il buon esempio dell'insegnante che l'esercizio mirato con gli studenti.

> "La logica è l'igiene che il matematico usa per far sì che le sue idee restino sane e robuste".
> Hermann Weyl, su "The American Mathematical Monthly", November, 1992.

Proviamo a dettagliare qualche aspetto su cui è utile insistere.
La matematica si occupa principalmente di *insiemi di oggetti* anziché di oggetti singoli: cuore del discorso matematico sono i teoremi, che solitamente contengono affermazioni di carattere universale: "per ogni oggetto x di un certo tipo, se vale la proprietà $p(x)$ allora vale la proprietà $q(x)$." Un teorema contiene quindi infinite affermazioni specifiche, e la sua dimostrazione consiste nel mostrare che ogni volta che vale $p(x)$ allora vale $q(x)$. Queste osservazioni introducono immediatamente una specificità del ragionamento matematico rispetto al ragionamento comune. Nel linguaggio comune è normale fare affermazioni attorno a oggetti singoli, ad esempio *quella finestra*. Posso dire che quella finestra è aperta o è chiusa. Ma se io chiedo: le finestre di questa stanza sono aperte o chiuse? Le risposte possibili non sono più solo due: "Tutte le finestre sono aperte"; "Almeno una finestra è aperta"; "Nessuna finestra è aperta". Questa è la situazione più comune nel ragionamento matematico: "Per ogni x vale la proprietà $p(x)$"; "Esiste almeno un x per cui vale la proprietà $p(x)$"; "Per ogni x non vale la proprietà $p(x)$". Non che queste cose non possano entrare anche nei ragionamenti della vita quotidiana, ma in matematica occorrono molto più di frequente. Usiamo continuamente i quantificatori "esiste", "per ogni", e questa è una difficoltà specifica del ragionamento matematico. Detto con linguaggio logico: nei ragionamenti quotidiani, utilizziamo spesso quelle che la logica chiama "proposizioni atomiche" come "questa finestra è aperta". In matematica se ne usano poche (un esempio è: "il numero 5 è dispari": non diciamo spesso frasi così semplici); le proposizioni matematiche sono ottenute normalmente utilizzando proprietà che contengono *variabili*: la proposizione "Tutte le finestre di questa stanza sono aperte"

ha la struttura logica "Per ogni finestra x di questa stanza, x è aperta", cioè "per ogni x nell'insieme S, vale la proprietà $p(x)$". Detto con linguaggio logico: *nel discorso matematico comune si fa un uso essenziale della logica predicativa e non solo della logica proposizionale*, e questo è uno degli elementi di difficoltà specifica del ragionare matematico rispetto a quello del linguaggio comune. Utilizzare correttamente i quantificatori, non lasciarli impliciti (magari nell'articolo indeterminativo "un"), comprendere cosa afferma una implicazione e che cosa esattamente è incompatibile con essa, usare in modo non ambiguo la "o" (esclusiva o non esclusiva?), costruire in modo corretto la negazione di una proposizione, ecc., sono elementi necessari al ragionamento matematico. Ecco che allora nell'insegnamento della matematica non è inutile che ci siano dei momenti in cui si fa un esercizio mirato volto all'acquisizione di una maggior consapevolezza logico-linguistica, con particolare riguardo agli aspetti appena citati. Questo tipo di esercizio mirato ha poco a che fare con l'insegnare "elementi di logica", nel senso *formale* del termine. Tra l'altro, quando sui libri di testo, di scuola o università, si introducono i primi elementi di logica, quasi sempre ci si concentra esclusivamente sulla logica proposizionale: connettivi, tavole di verità, ecc., argomenti che, per quanto osservato prima, non colgono affatto il cuore della difficoltà che lo studente incontra nel ragionamento matematico, che ha più a che fare con proprietà e quantificatori. Questo tipo di lavoro richiede strumenti. Il testo "Matematica. Questione di metodo" [BT], che ho scritto con Giancarlo Travaglini, è in parte rivolto esattamente a questo tipo di lavoro logico-linguistico, e in parte approfondisce più specificamente la mentalità con cui va affrontato lo studio di un testo matematico (tipicamente, ma non necessariamente, universitario) fatto di definizioni, dimostrazioni, eccetera.
Per la mia esperienza, gli studenti si lasciano volentieri coinvolgere in questo tipo di esercizi logici. Forse perché non richiedono alcun prerequisito, ma solo il ragionare in tempo reale, accettano di mettersi in gioco, provano gusto per il capire qualcosa di più di se stessi, della loro ragione in azione. Anche al prim'anno di università, non considerano questi esercizi con sufficienza, come dei "giochi per bambini", ma li prendono sul serio.
Queste cose dal mio punto di vista non sono preliminari, da trattare in qualche lezione introduttiva, oppure nelle prime pagine dei libri di testo, solo perché si usa far così, e poi si passa oltre, ai "contenuti veri": queste cose sono la stoffa di ogni ragionamento matematico. A questo tipo di lavoro può essere dedicato del tempo in classe, magari all'inizio di un anno o di un periodo, ma è anche importante che poi le attitudini di ragionamento inizialmente esemplificate su esercizi preliminari siano giocate e esemplificate dal docente sui contenuti matematici specifici che si affrontano nel corso, in una dimostrazione, nella lettura del testo di un problema, o altro.
Ma diciamo qualcosa di più: il ragionamento matematico non solo richiede un'attenzione logica al linguaggio; il ragionamento matematico *si nutre di un amore per il linguaggio*. Senza amore per il linguaggio, la matematica resterà sempre un'estranea. Questo approfondisce la frase di Weyl sulla logica come igiene mentale. Un certo uso delle parole non nasce dalla paura dell'errore (cioè dalla paura della "malattia") ma dall'amore per il linguaggio, cioè per la verità, per la conoscenza, e per la *comunicazione con altri esseri umani*. Dobbiamo ripetere ai ragazzi che il linguaggio e la scrittura ci sono dati per comunicare *con altre persone*, non con se stessi! Quanti ragazzi giustificano il proprio scrivere male dicendo "ma tanto io capisco", o il proprio parlare male dicendo "l'importante è capirsi", il che è proprio ciò che non accade. Apprezzare e far apprezzare le differenze specifiche del linguaggio matematico rispetto ad altri linguaggi disciplinari è importante per accettare (e far accettare) certe sottolineature e attenzioni non come una "deformazione mentale" ma come un giusto adeguamento del metodo all'oggetto di studio. Apprezzare un sapere come quello matematico, che attraversa il tempo e lo spazio, con una tradizione vivente che prosegue da 2500 anni in tutto il mondo, non è possibile senza un interesse alla comunicazione tra le persone, una cura per il linguaggio scritto e parlato come condizione necessaria per la comunicazione tra le persone.
Questo tipo di sottolineatura dovrebbe valere ancora di più nello studio dell'Italiano, dove il linguaggio assume anche il suo carattere estetico, o argomentativo, e non solo logico deduttivo. E' interessante quanto afferma ancora Rigotti (v. [Ri], cap.4) sull'importanza di educare

all’argomentazione, a scuola. Che ci siano momenti di discussione critica, su temi di interesse per gli studenti, in cui gli studenti discutono argomentando, e il ruolo del docente è quello di educare ad argomentare correttamente.

C. Dal linguaggio ai linguaggi: il valore della disciplina specifica

Ogni disciplina ha un suo linguaggio, e al suo interno dei linguaggi più specifici. In matematica il linguaggio non è solo un certo uso della logica. C’è un altro aspetto del linguaggio, direttamente legato ai *contenuti matematici*. Si può dire anzi che l’insegnamento della matematica a scuola, dalle elementari alle superiori, consista in misura importante nell’insegnamento di certi *linguaggi specifici* della matematica:

- la scrittura dei numeri;
- il linguaggio dell’algebra, o del “calcolo letterale”;
- la geometria analitica;
- il linguaggio degli insiemi e delle funzioni

sono esempi di linguaggi matematici specifici che costituiscono una parte importante dell’insegnamento della matematica a scuola. Per diverse volte nell’arco dell’età scolastica, l’allievo è introdotto ad un nuovo linguaggio, con cui affronterà un nuovo contesto. In ciascuno di questi nuovi contesti molto spesso non si arriva lontano: grandi teorie, grandi teoremi, non se ne vedono spesso a scuola, se si toglie la geometria euclidea e un po’ di analisi matematica alla fine dei licei. Questo è uno dei motivi per cui la matematica della scuola viene spesso associata al fare esercizi, agli aspetti procedurali, di tecniche, formule ecc., più che all’aspetto di teoria ipotetico deduttiva fatta di definizioni, teoremi, dimostrazioni. Certamente un maggior peso, nella matematica scolastica, dell’aspetto ipotetico deduttivo (definizioni, teoremi, dimostrazioni) non potrebbe che giovare sia all’educazione del ragionamento nei ragazzi, sia alla reputazione della matematica tra di loro, o almeno tra i più intellettualmente vivaci di loro. Ma occorre anche capire e valorizzare fino in fondo il ruolo dei vari linguaggi matematici specifici che sono insegnati a scuola, per apprezzare il fatto che insegnare e imparare questi linguaggi è molto di più che un addestramento tecnico. Diversamente, il docente avrà, come dicevo all’inizio, quell’atteggiamento “deluso” di chi pensa “la mia materia sarebbe bella, ma con queste quattro cose che si insegnano a scuola cosa vuoi comunicare...”. Dobbiamo capire invece tutto il valore di queste “quattro cose” e fare di tutto per comunicarlo, nell’insegnamento.[3]
Prendiamo ad esempio il linguaggio algebrico, del calcolo letterale: il concetto di incognita, l’idea di formalizzare un problema mediante un’equazione, la scrittura simbolica e il “calcolo letterale”…
Se riflettiamo su queste idee, magari avendo anche un’idea della fatica con cui storicamente sono emerse nell’arco di secoli[4], vediamo che il linguaggio matematico non è semplicemente un modo per comunicare certe idee, ma è esso stesso il luogo in cui *risiedono* certe idee. Il linguaggio incorpora in sé progressi, idee, giudizi, astrazioni frutto di una lunga storia. Per questo quando ragioniamo usando un certo linguaggio, certi problemi (non tutti!) appaiono banali, mostrano da sé la strada per la propria soluzione. Questo succede ad esempio quando certi problemi formulati nel linguaggio quotidiano vengono formalizzati con una semplice equazione di primo grado. In realtà il problema non può essere considerato banale di per sé; piuttosto, si può dire che in quel caso *il linguaggio si sia fatto carico della maggior parte del lavoro necessario a risolvere il problema.* Dire questo non è come dire che la fatica l’ha fatta la lavagna, o la penna: “il linguaggio” non è qualcosa di impersonale, è uno dei frutti di 2500 anni di storia e di tradizione matematica. Quindi non è qualcosa che ci è dato “gratis” (e quindi su cui possiamo non soffermarci più di tanto). Il

[3] Per approfondire questi 4 esempi notevoli di linguaggi matematici rimando al mio articolo [B2], “I linguaggi matematici”.
[4] di nuovo, torno a notare che un po’ di conoscenza della storia delle idee matematiche per un insegnante di matematica non è un *optional*.

linguaggio ricapitola i progressi concettuali di tutta una storia, e ci vedere le cose dalle spalle dei giganti. Ma se è stato faticoso arrivarci per l'umanità, se è stata una conquista di secoli, sarà faticoso anche oggi per chi lo incontra per la prima volta, e questo dice della pazienza e accortezza che occorre avere nell'insegnare queste cose, e anche della grande dignità che queste cose hanno. Altro che "banale equazione di primo grado"!
Concretamente, sottolineare l'aspetto di novità che il linguaggio introduce significa anche dedicare esplicitamente del tempo e spazio alla discussione di questi aspetti. Quanti studenti, tra coloro che hanno imparato a risolvere un'equazione di primo grado, saprebbero spiegare in modo soddisfacente cosa vuol dire "incognita"? O cosa vuol dire "risolvere un'equazione"?
Un altro esempio efficace si può fare riguardo al linguaggio della logica. Se vogliamo dimostrare che la somma di due numeri pari è pari, noi oggi diciamo:
"Siano $2n$, $2m$, due generici numeri pari; allora $2n+2m=2(n+m)$ che è pari, perciò la somma di due numeri pari è pari".
Un ragazzino di terza media è in grado di capire il passaggio $2n+2m=2(n+m)$; più difficilmente, però, capisce perché quel semplice passaggio costituisca una dimostrazione del teorema che abbiamo citato. La parte più delicata della dimostrazione, infatti, non è il calcolo, ma la generalità del suo significato. Nella frase "sia $2n$ il generico numero pari" è implicita la fatica di secoli con cui si è arrivati all'algebra simbolica e l'idea logica di dimostrare che una proprietà vale per tutti gli elementi di un certo insieme dimostrando che vale per il *generico* elemento dell'insieme. Nei libri di testo di matematica universitaria si scrive spesso, frettolosamente, nella prima pagina di "preliminari", che "il simbolo $\forall$ si legge per tutti, per qualsiasi", senza segnalare la profondità di pensiero insita nell'identificare queste due diverse espressioni[5].
Un altro aspetto importante è che un buon linguaggio apre nuovi orizzonti, rende naturale o per lo meno possibile porsi determinate domande che prima non erano neppure formulabili, indagare oggetti che prima non erano neppure definibili. Ad esempio, il linguaggio della geometria analitica rende possibile descrivere, e quindi indagare, curve che senza di esso non potevano essere neppure definite.
Perciò la scoperta e l'invenzione delle idee matematiche sono inseparabili dalla creazione e dall'uso del linguaggio matematico.
Questo rapporto tra linguaggio ed idee matematiche è certamente un motivo importante delle difficoltà che si incontrano nello studiare e nell'insegnare la matematica: una delle cose più faticose da acquisire per uno studente è un linguaggio corretto, e d'altro canto dovrebbe essere chiaro dal discorso precedente quanto questo sia importante. I motivi di questa fatica sono vari:

- Il motivo più ovvio è proprio il fatto che apprendere un linguaggio significa in realtà apprendere un insieme di idee non banali, che hanno richiesto tempo per maturare nella storia; perché dovrebbero poter maturare istantaneamente nella persona? Di questo occorre semplicemente essere consapevoli.
- Esiste anche una certa resistenza tipica da parte dello studente a voler imparare il linguaggio, dovuta al pregiudizio diffuso secondo cui linguaggio e contenuto sono pensati come aspetti nettamente separati. "Io voglio capire le idee, in soldoni; farei a meno di usare questo linguaggio se il professore non fosse così pedante". Così facendo non si capisce che senza impadronirsi del linguaggio, sono proprio le idee che non si riescono a capire. E si perde il vantaggio di tutto il progresso e il pensiero che in quel linguaggio sono ricapitolati.

[5] Il modo in cui, nella dimostrazione di un teorema, si prova che una certa proprietà vale *per tutti* gli oggetti di un certo tipo (che solitamente sono infiniti) è mostrare che quella proprietà vale per un *qualsiasi* oggetto di quel tipo, cioè per un *generico* oggetto di quel tipo. La genericità, resa possibile dall'astrazione degli oggetti, è ciò che consente di raggiungere con un numero finito di passi una conclusione valida in infiniti casi. L'identificazione di "per tutti" con "per qualsiasi" (locuzioni indicate dallo stesso simbolo matematico), quindi, condensa in sé un aspetto profondo della potenza del metodo dimostrativo.

- In terzo luogo, insegnare il linguaggio implica da parte del docente uno sforzo didattico non indifferente. Il linguaggio, infatti, è per il docente come un abito che indossa senza più neanche accorgersene; il docente mette a tema e sviscera esplicitamente certi contenuti, e molto più implicitamente comunica un certo linguaggio. Mettere a tema e sviscerare esplicitamente il linguaggio che si sta usando è un'operazione didattica delicata, che richiede nel docente uno sforzo di introspezione e di immedesimazione nell'ascoltatore ("qual è la difficoltà che questi studenti stanno incontrando, o che io ho incontrato, nel recepire questo termine?").

D. Il valore della teoria e dello studio di un testo

La matematica è essenzialmente un sapere ipotetico-deduttivo. Si sviluppa in teorie che partono da assiomi, danno definizioni, dimostrano teoremi. Gli elementi di valore della matematica che abbiamo citato in precedenza (la capacità di una dimostrazione matematica di generare accordo tra le persone, l'alleanza tra progresso e tradizione, tra astrazione e concretezza..., e anche le caratteristiche significative dei vari linguaggi specifici della matematica, come la potenza dell'algebra simbolica nel trattare infinite equazioni in una sola formula) fanno riferimento alla matematica nel suo aspetto teorico.
Eppure a scuola il discorso matematico teorico è spesso messo nell'angolo, a vantaggio di esercizi, addestramento tecnici e applicazioni di procedure. La difficoltà oggettiva che, a partire dalla scuola dell'obbligo, incontrano gli allievi nell'impadronirsi di certe tecniche di calcolo genera un *circolo vizioso*:
1) per superare difficoltà e errori nelle procedure di calcolo ("calcolo" in senso lato), si dà sempre più tempo all'esercizio tecnico a discapito della teoria;
2) si studia sempre meno teoria e ci si convince che la matematica è solo procedure e calcoli;
3) la mancanza di un quadro teorico chiaro e consapevole non permette la sintesi e la capacità critica necessaria per affrontare gli esercizi in modo fruttuoso, e ci si affida ad ulteriori dosi di esercizio...
Esiste poi, forse anche negli insegnanti, un pregiudizio: *la teoria è difficile*. Certi insegnanti pensano di semplificare la vita ai loro studenti riducendo sempre più la teoria, mentre:
1) la teoria ben compresa è la guida fondamentale anche per svolgere correttamente le procedure;
2) per uno studente volonteroso e di capacità nella media può essere più semplice studiare la dimostrazione di un teorema che svolgere un esercizio complesso.
Ad ogni modo ridurre la teoria al minimo, nell'insegnamento della matematica, significa perdere completamente di vista i motivi fondamentali per cui la matematica merita di essere insegnata. Questo vale in un liceo scientifico ma in un certo senso quasi di più in un liceo classico, dove il valore culturale prima che strumentale della matematica dovrebbe essere messo in evidenza.
Diciamo fino in fondo le cose come stanno: *ci si è rassegnati al fatto che la matematica sia una materia che non richiede di essere studiata*, quasi la si potesse imparare unicamente "per osmosi", stando un po' attenti in classe e facendo esercizio. Da decenni i libri di testo di matematica si usano troppo spesso solo come raccolte di esercizi, mentre le pagine di teoria non si aprono neppure. La colpa della situazione è, ancora, un circolo vizioso che coinvolge la mentalità diffusa degli studenti e delle famiglie, l'atteggiamento dei docenti, il modo in cui sono scritti i libri di testo (il che a sua volta coinvolge la responsabilità di autori, case editrici, e ancora dei docenti). Ma è inutile distribuire le colpe. Il punto è che questo scandalo deve finire: la matematica va (anche) studiata sui libri, così come la storia, la letteratura italiana o la biologia. Il docente deve riappropriarsi dell'uso di lezioni, libro di testo, interrogazioni e verifiche anche sulla teoria. La matematica dev'essere insegnata col suo spessore culturale, non può essere un addestramento. I libri di testo vanno scelti con cura, se è il caso riscritti, per questo scopo.

E. Il valore della memoria

Rivendicare l'importanza dello studio di testi scritti, contro l'illusione dell'apprendimento "per pura osmosi" mi porta anche a un'osservazione sul valore della *memoria*. Si studia *per ricordare*, naturalmente. Mentre delle abilità che si sono acquisite per pura esposizione momentanea alla pratica ripetuta, senza consapevolezza, cosa rimane nel tempo? Il valore della memoria è sotto attacco nell'era di internet, trasferita dalle nostre menti ai server della rete. In un'epoca in cui ogni informazione è rapidamente ottenibile dalla rete in tempo reale, cosa serve ricordare? Capovolgiamo questa affermazione: cosa mi serve poter, in ogni momento in cui lo desidero, scaricare dalla rete il testo di una poesia di Leopardi, se qualcosa di quei versi non rimane dentro di me? Come può informare la mia vita qualcosa che non abita *permanentemente* nella mia coscienza? Come può esserci creatività scientifica (e non solo), cioè scoperta di nessi originali nella realtà, se i vari elementi di realtà di cui si tratta non sono prima presenti alla mia mente *stabilmente*, così che la mia mente possa percorrere avanti e indietro le strade di quelle realtà, esplorandone i nessi?

F. Riappropriarsi di motivazioni e obiettivi del percorso didattico, e renderne consapevoli gli studenti

Abbiamo visto più volte negli anni cambiare programmi e indicazioni ministeriali, modalità di svolgimento degli esami di stato; abbiamo visto sorgere e declinare mode di vario tipo nell'insegnamento della matematica (anzi, per la verità il rischio è che ne sorgano continuamente di nuove e non ne declini nessuna, così che i libri di testo si gonfiano fino a esplodere). Gli insegnanti si sentono spesso tra l'incudine e il martello: da una parte un sistema che chiede loro sempre di più, d'altro canto una realtà fatta di ore settimanali limitate, vincoli di vario tipo, carenze di base negli studenti, situazioni problematiche in aumento tra gli studenti, ecc. ecc. E' chiaro che bisogna venire a qualche compromesso. Il problema è il criterio con cui si fanno questi compromessi. Un rischio che vedo è che l'insegnante tracci il proprio percorso didattico (il programma svolto e il modo di svolgerlo) in parte in ossequio a consuetudini e tradizioni consolidate, in parte per tutelarsi da esami di stato o condizionamenti di vario tipo, e con qualche taglio di qua e qualche taglio di là, per stare nei tempi, si arrivi a confezionare un percorso che ha poca coerenza e poca attrattività.
Si tratta di individuare (anche in base alle indicazioni nazionali) *gli obiettivi che si vogliono raggiungere, e costruire a ritroso un percorso che consenta di arrivare a quegli obiettivi, senza aver timore di tagliare elementi che a questo percorso non sono funzionali.*

Esemplifico sull'argomento che mi è più congeniale, l'analisi matematica. Le indicazioni nazionali dicono che in quinta liceo occorre introdurre il calcolo differenziale e integrale sottolineandone in particolare i significati fisici e geometrici, il modo in cui consente di affrontare problemi di massimo e minimo, calcolare aree e volumi. Credo che sia possibile cercare di costruire, a ritroso, un percorso teorico interessante che arrivi a questi obiettivi. In generale, nella costruzione di un percorso didattico, il criterio è: di ogni argomento che presento in aula devo sapere perché lo sto presentando. Il motivo può essere:
1) questo argomento è bello o utile in sé (es.: voglio spiegare l'integrale definito perché voglio mostrare come il pensiero scientifico è arrivato a capire cosa sia e come si possa calcolare l'area di una regione a contorni curvilinei);
2) questo argomento –svolto in questo modo- è funzionale a un altro che dovrò trattare in seguito –svolto in quel certo modo- (es. voglio spiegare il limite finito di una funzione al finito, perché mi serve per definire la derivata di una funzione);
3) questo argomento è utile in un'altra materia (ad es. la fisica) (es. voglio spiegare che la derivata è la velocità istantanea di variazione di una grandezza, perché utilizzerò questo fatto in fisica).
Uno stesso argomento può avere più di una motivazione, ma deve averne almeno una: non può essere svolto solo perché si è sempre fatto così. Se rispetto agli obiettivi del corso ci bastano funzioni definite in un intervallo, perché perdere tempo a definire cos'è un punto di accumulazione? Siamo sicuri che gli esercizi sui limiti notevoli ci servano? O il teorema di De L'Hospital? Siamo sicuri che ci serva saper classificare i punti di discontinuità di una funzione? Gli esempi si possono moltiplicare. Spesso il docente si lamenta di non avere tempo per svolgere certi argomenti richiesti dalle indicazioni nazionali, ed è vero che queste sono sovradimensionate, ma è anche vero che il docente stesso molte volte non rinuncia a svolgere certi altri elementi non esplicitamente richiesti, solo perché è consuetudine insegnarli.

Un'altra raccomandazione che mi sembra fondamentale è che gli studenti vanno resi partecipi, consapevoli, di quali sono gli obiettivi e qual è il percorso. Tradizionalmente nell'insegnamento della matematica c'è una tendenza a presentare gli argomenti uno dopo l'altro, con un certo dettaglio e sistematicità, ben distinti a compartimenti stagni. In questo modo è difficile cogliere il disegno complessivo. Resta l'impressione che "ora si fa questo perché si deve fare". Esplicitare percorso e obiettivi però non significa semplicemente dichiararli verbalmente (cosa che comunque non guasta, quando si hanno davanti studenti che non sono più bambini). Significa anche costruire il percorso in modo che la sua finalità sia *sempre* evidente, anche a costo di sacrificare un po' la linearità e sistematicità dello svolgimento, con una esposizione che ogni tanto salta avanti o indietro tra due argomenti, ogni tanto apre qualche parentesi, e così via, ma in compenso in ogni momento lascia trasparire la motivazione di ciò che si sta facendo.

Qualche altro esempio di quest'affermazione presa dall'analisi matematica di quinta liceo. Un percorso tradizionale di vari libri di testo: 1) calcolo differenziale; 2) ricerca delle primitive; 3) integrale definito. Se si procede così, per lo studente qual è la motivazione del passo 2? Ovviamente la motivazione è il passo 3 (che viene dopo), quindi noi stiamo dicendo: "fidati e studia, poi capirai perché". In alternativa si può fare invece: 1) calcolo differenziale; 2) integrale definito, cioè: perché lo si introduce, come lo si definisce, le sue proprietà, il teorema fondamentale del calcolo integrale; allora adesso ci serve saper calcolare la primitiva di una funzione, quindi apriamo una parentesi e, 3) ricerca delle primitive. Per poi ritornare alle applicazioni dell'integrale definito (qualche volume o area, ad esempio). Non è più motivata, così, la fatica che si chiede allo studente?

Conclusioni

Ho iniziato con la domanda "Si può insegnare a ragionare", cui ho risposto subito dicendo "Non so se si può, ma si deve". Cioè: anche se il buon esito non è mai garantito e non è del tutto in mano nostra, come docenti non possiamo sottrarci al dovere di educare all'uso della ragione. Ho voluto allargare il discorso, da ragionamento a ragione, e ho affermato che il buon esempio dato dal docente, di metodo corretto in azione, può e dev'essere, più ampiamente, esempio di un uso appassionato della ragione. Questo, credo, è ciò che può colpire anche lo studente svogliato e fargli venire voglia di andare più a fondo della propria stessa ragione, della materia che studia, e della realtà. I vari aspetti che ho toccato mi sembrano andare in questa direzione: un docente appassionato di ciò che insegna, cioè che è convinto del valore della propria disciplina e ne dà testimonianza nel suo concreto insegnamento, un docente che disegna il percorso didattico evidenziando motivazioni e obiettivi, e ne rende consapevoli gli studenti, un docente che mostra la potenza del linguaggio correttamente utilizzato all'interno della propria disciplina, che mostra l'importanza dello studio di un testo, della memoria, che, in particolare, presenta la matematica come cultura e come discorso teorico, potente nel descrivere e catturare la realtà, ma che non consiste di ricette, formule e procedure, può sperare di coinvolgere lo studente nell'uso della ragione, in modo che lui stesso desideri fortificarsi e crescere in questo percorso. Allora anche gli esercizi specificamente mirati al ragionamento (come, per la matematica, sono certi esercizi di logica e linguaggio a cui ho accennato) possono essere utilizzati, come strumento di crescita della consapevolezza che lo studente ha del proprio ragionare.

Riferimenti bibliografici

[B1] M. Bramanti: Che cos'è la matematica. Articolo in due parti su:
"Emmeciquadro", nr. 17, aprile 2003. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/17/mc2_17_bramanti_cosa-e-la-matematica.pdf
"Emmeciquadro", nr. 18, agosto 2003. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/18/mc2_18_bramanti_cosa-e-la-matematica.pdf

[B2] M. Bramanti: I linguaggi matematici. Idee e simboli. Articolo in due parti su:
"Emmeciquadro", nr. 42, agosto 2011. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/42/mc2_42_bramanti_linguaggi-matematici.pdf
"Emmeciquadro", nr. 43 - dicembre 2011. Scaricabile al link:
http://emmeciquadro.euresis.org/mc2/43/mc2_43_bramanti_laboratorio-matematica.pdf

[B3] M. Bramanti: Elogio dell'astrazione. L'interesse degli oggetti matematici. Articolo in due parti su:
"Emmeciquadro", nr. 49 - giugno 2013. Scaricabile al link:
http://www.ilsussidiario.net/News/emmeciquadro/Emmeciquadro-n-49/2013/6/26/SCIENZAinATTO-Elogio-dell-Astrazione-L-interesse-degli-Oggetti-Matematici-1-/397567/
"Emmeciquadro", nr. 50 - settembre 2013. Scaricabile al link:
http://www.ilsussidiario.net/News/emmeciquadro/Emmeciquadro-n-50/2013/7/1/SCIENZAinATTO-Elogio-dell-Astrazione-L-interesse-degli-Oggetti-Matematici-2-/400840/

[B4] M. Bramanti: La Matematica come linguaggio della scienza. Articolo su:
"Emmeciquadro", nr. 63 - dicembre 2016. Scaricabile al link:
http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/mc2_63_bramanti_matematica-come-linguaggio.pdf

[B5] M. Bramanti: Il ragionare matematico. Testo di conferenza, contenuto in "Conoscenza e compimento di sé". A cura di Eddo Rigotti e Carlo Wolfsgruber. Fondazione per la Sussidiarietà, Milano 2014, pp.41-53. Scaricabile al link:
http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/ragionare_matematico.pdf

[BT] M. Bramanti, G. Travaglini: Matematica. Questione di Metodo. Zanichelli, 2009.

[C] R. Cooke: The history of mathematics. A brief course. John Wiley & Sons, Inc., 1997.

[CR] R. Courant, H. Robbins: Che cos'è la matematica? Boringhieri, 1950.

[D] K. Devlin: Il linguaggio della matematica. Rendere visibile l'invisibile. Bollati Boringhieri, 2014.

[EU] EURESIS (AA.VV.): Da uno a infinito: al cuore della matematica. (Catalogo della mostra presentata al Meeting di Rimini 2010). Frimedia 2010. v. www.euresis.org, www.itacalibri.it

[G] E. Giusti: Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento. Il giardino di Archimede. Pisa – Roma. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali. 2007.

[H] K. Houston: How to think like a mathematician. A Companion to undergraduate mathematics. Cambridge University Press, 2009.

[M] R. Manara: La matematica e la realtà. Linee di metodo. Marietti, 2002.

[Ri] E. Rigotti, Conoscenza e significato. Per una didattica responsabile. Mondadori Università, 2009.

Strumenti di lavoro in rete

Il corso online (liberamente fruibile), sul sito del Politecnico di Milano, "Introduzione alla matematica per l'università"
http://fds.mate.polimi.it/index.php?arg=mooc&id_pagina=246#pos1

La rivista online (liberamente fruibile) "Emmeciquadro", rivolta a insegnanti di materie scientifiche delle scuole di ogni ordine e grado
http://www.ilsussidiario.net/News/Emmeciquadro/

Marco Bramanti
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano
Via Bonardi 9. 20133 Milano
marco.bramanti@polimi.it
http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/