

Indice

Prefazione	ix
Capitolo 1. Elementi di analisi funzionale. Spazi di funzioni continue	1
1.1. Generalità sugli spazi di funzioni	3
1.1.1. Spazi vettoriali	3
1.1.2. Spazi metrici	6
1.1.3. Successioni di Cauchy e completezza	9
1.1.4. Dagli spazi di funzioni agli spazi astratti	12
1.2. Convergenza uniforme per successioni e serie di funzioni. Spazi C^k	12
1.2.1. Successioni di funzioni: convergenza puntuale e uniforme	13
1.2.2. Successioni di funzioni e derivazione	19
1.2.3. Serie di funzioni: convergenza puntuale e uniforme	23
1.2.4. Spazi di funzioni infinitamente derivabili	28
1.2.5. Spazi di funzioni continue su tutto \mathbb{R}^n	30
1.3. Esercizi e complementi	33
Capitolo 2. Integrale di Lebesgue. Spazi di funzioni integrabili	39
2.1. Motivazione	39
2.2. La misura di Lebesgue	42
2.3. L'integrale di Lebesgue	46
2.3.1. La definizione di integrale rispetto a una misura astratta	46
2.3.2. Relazione tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue	55
2.3.3. I teoremi di convergenza per l'integrale di Lebesgue	59
2.3.4. Derivazione sotto il segno di integrale	63
2.3.5. Il teorema fondamentale del calcolo integrale	71
2.4. Spazi L^p	72
2.5. Integrali doppi in \mathbb{R}^n	77
2.6. Convulsione in \mathbb{R}^n	79
2.7. Esercizi e complementi	81
Capitolo 3. Operatori e funzionali lineari continui	93
3.1. Operatori lineari continui	93
3.2. Funzionali lineari continui	97
3.3. Esercizi	101
Capitolo 4. Spazi di Hilbert, metodi di ortogonalità e problemi di Sturm-Liouville	107
4.1. Spazi vettoriali con prodotto interno	107
4.2. Spazi di Hilbert	112
4.3. Analisi di Fourier in spazi di Hilbert	114

4.4.	Il sistema trigonometrico. Serie di Fourier in una o più variabili	124
4.4.1.	Completezza del sistema trigonometrico e serie di Fourier in L^2	124
4.4.2.	Serie di Fourier in più variabili	127
4.5.	Un esempio di “wavelets”: la base di Haar	129
4.6.	Il metodo di separazione delle variabili e gli sviluppi di Fourier classici	132
4.6.1.	La corda vibrante fissata agli estremi	133
4.6.2.	L’equazione di Laplace sul cerchio	138
4.6.3.	L’equazione di diffusione sul segmento	152
4.7.	Problemi di Sturm-Liouville e polinomi ortogonali	156
4.7.1.	Problemi di Sturm-Liouville regolari	156
4.7.2.	Problemi di Sturm-Liouville singolari e polinomi ortogonali	158
4.8.	Esercizi e complementi	174
Capitolo 5.	Alcune applicazioni dei polinomi ortogonali a problemi differenziali della fisica matematica	181
5.1.	Laplaciano in coordinate sferiche. Polinomi di Legendre e armoniche sferiche	181
5.1.1.	Impostazione del problema	181
5.1.2.	Il dato indipendente dalla longitudine. Polinomi di Legendre	184
5.1.3.	Il caso generale. Funzioni di Legendre associate e armoniche sferiche	185
5.1.4.	Soluzione del problema di Dirichlet sulla sfera	190
5.2.	Oscillatore armonico quantistico e polinomi di Hermite	192
5.3.	Equazione di Schrödinger per l’atomo di idrogeno e polinomi di Laguerre	196
5.3.1.	Impostazione del problema	196
5.3.2.	Equazione e polinomi di Laguerre associati	199
5.3.3.	Orbitali atomici	202
5.3.4.	Soluzioni dell’equazione di Schrödinger	208
5.3.5.	Calcoli dettagliati per la risoluzione dell’equazione radiale	208
Capitolo 6.	Teoria delle funzioni derivabili di variabile complessa	211
6.1.	Generalità su funzioni complesse di variabile complessa	211
6.1.1.	Il piano complesso	211
6.1.2.	Funzioni complesse di variabile complessa	212
6.1.3.	Topologia e limiti di funzioni	213
6.1.4.	Funzioni radice n -esima e logaritmo in \mathbb{C} . Polidromia	217
6.1.5.	Curve nel piano complesso	220
6.2.	La definizione di funzione derivabile in \mathbb{C} . Condizioni di Cauchy-Riemann	226
6.3.	Alcune applicazioni fisiche e geometriche del concetto di funzione olomorfa	232
6.3.1.	Significati fisici delle funzioni olomorfe	232
6.3.1.1.	Coniugata di una funzione olomorfa e campi irrotazionali solenoidali	232
6.3.1.2.	Moto stazionario piano di un liquido incomprimibile non vorticoso	234
6.3.1.3.	Funzioni armoniche	237
6.3.2.	Significato geometrico delle funzioni olomorfe. Mappe conformi	240
6.4.	Serie di potenze nel campo complesso	245
6.4.1.	Generalità sulle serie di potenze nel campo complesso	245

6.4.2. Le funzioni trascendenti elementari nel campo complesso	252
6.5. Integrazione nel campo complesso	258
6.5.1. Definizione e prime proprietà dell'integrale di linea in \mathbb{C}	258
6.5.2. Teoremi integrali di Cauchy e analiticità delle funzioni olomorfe	264
6.5.3. Applicazioni alle funzioni armoniche	277
6.5.3.1. Il problema di Dirichlet nel semipiano	277
6.5.3.2. Il problema di Dirichlet nel cerchio	280
6.5.4. Proprietà delle funzioni analitiche	282
6.6. Punti singolari di una funzione olomorfa e teorema dei residui	285
6.6.1. Sviluppi in serie bilaterale	285
6.6.2. Singolarità di una funzione olomorfa	289
6.6.3. Residui di una funzione olomorfa	296
6.6.4. Calcolo dei residui	299
6.6.4.1. Singolarità eliminabile	300
6.6.4.2. Polo del prim'ordine	300
6.6.4.3. Polo di ordine n	302
6.6.4.4. Funzioni pari	303
6.7. Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali	303
6.7.1. Calcolo di integrali in \mathbb{C} mediante il metodo dei residui	304
6.7.2. Calcolo di integrali in \mathbb{R} mediante il metodo dei residui	305
6.7.2.1. Integrali di funzioni razionali	305
6.7.2.2. Integrali di tipo trasformata di Fourier	310
6.7.2.3. Integrali generalizzati che richiedono di aggirare un polo	315
6.7.2.4. Altri integrali in \mathbb{R} calcolabili con metodi di analisi complessa	319
6.8. Esercizi e complementi	325
Capitolo 7. Trasformata di Fourier e applicazioni	333
7.1. La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$	333
7.1.1. Definizione e proprietà elementari	333
7.1.2. Approssimazioni dell'identità	343
7.1.3. Il teorema di inversione	344
7.2. Calcolo della trasformata di Fourier di alcune classi di funzioni con metodi di analisi complessa	347
7.3. Applicazioni della trasformata di Fourier alle equazioni a derivate parziali	356
7.3.1. L'equazione di Laplace nel semipiano	356
7.3.2. L'equazione del calore in tutto lo spazio	361
7.3.3. Problemi unidimensionali di diffusione con trasporto e reazione	366
7.4. La trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R}^n)$	367
7.4.1. Lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida	367
7.4.2. Trasformata di Fourier su L^2	369
7.4.3. Applicazioni della trasformata di Fourier su L^2	374
7.4.3.1. Principio di indeterminazione di Heisenberg	374
7.4.3.2. Equazione di Schrödinger della particella libera	378
7.5. Tabelle	379
7.6. Esercizi e complementi	380
Capitolo 8. Trasformata di Laplace e applicazioni	385
8.1. Definizione di L-trasformata e prime proprietà	386

8.2.	Proprietà operatoriali della trasformata di Laplace	392
8.3.	Inversione della trasformata di Laplace	398
8.3.1.	Metodi operativi di inversione	398
8.3.2.	Dimostrazione della formula di inversione con i metodi di analisi complessa	403
8.4.	Confronto fra trasformata di Fourier e trasformata di Laplace	407
8.5.	Applicazioni della trasformata di Laplace	408
8.5.1.	Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti	409
8.5.2.	Un esempio di equazione integro-differenziale: circuiti elettrici LCR	416
8.5.3.	Un'esempio di equazione integrale: circuito elettrico RC	419
8.5.4.	Risonanza nelle oscillazioni forzate e non smorzate	421
8.5.5.	Equazioni integrali di Volterra	424
8.5.6.	La trasformata di Laplace e l'equazione di Laguerre	428
8.6.	Tabelle	432
8.7.	Esercizi e complementi	433
Capitolo 9.	Teoria delle distribuzioni	437
9.1.	Motivazione	437
9.2.	Generalità sulle distribuzioni	440
9.2.1.	Funzioni test e distribuzioni	440
9.2.2.	Derivata di una distribuzione	448
9.2.3.	Operazioni sulle distribuzioni	456
9.3.	Distribuzioni a supporto compatto, convoluzione di distribuzioni	465
9.4.	Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali	467
9.5.	Trasformata di Fourier di distribuzioni e applicazioni	472
9.5.1.	Distribuzioni temperate e loro trasformata di Fourier	472
9.5.2.	Serie trigonometriche divergenti come distribuzioni temperate	480
9.5.3.	Il treno di impulsi come distribuzione temperata	481
9.6.	Tabelle	484
9.7.	Trasformata di Laplace di distribuzioni e applicazioni	485
9.8.	Esercizi e complementi	492
Capitolo 10.	Applicazioni ai filtri e al campionamento di segnali	501
10.1.	Generalità su segnali, sistemi e filtri	501
10.2.	Filtri causali, ideali, reali	509
10.3.	Campionamento di un segnale e teorema di Shannon	513
10.4.	Esercizi e complementi	521
Bibliografia		525