

Il ragionare matematico

Marco Bramanti

Che cos'è il ragionamento matematico – Che cos'è la matematica

Dire cos'è il ragionamento matematico non è molto diverso da dire cos'è la matematica: infatti, chi ha provato a dire cos'è la matematica normalmente ne ha definito il metodo, il modo di ragionare. Ad esempio: "La matematica pura è la classe di tutte le proposizioni della forma 'p implica q' [...]" (Russell 1989).

Curiosamente, e diversamente, ad esempio, dalla chimica, dalla biologia, dalla storia, la matematica non è definita in modo naturale dagli oggetti che studia. Possiamo dire che la biologia è la scienza che studia gli esseri viventi, o la chimica la scienza che studia le trasformazioni delle sostanze, la storia la disciplina che studia le vicende umane del passato..., ma la matematica di cosa si occupa? Forse la matematica è "la scienza dei numeri"? Questo non è vero più di quanto non lo sia l'affermazione "l'architettura è la scienza che studia i mattoni" o "la pittura è la disciplina che studia le vernici". Si può dire piuttosto che *la matematica è definita dal suo modo di procedere*.

Caratteristiche di base del ragionare matematico

Il ragionamento matematico è tipicamente un ragionamento *ipotetico deduttivo*: "se, allora".

La matematica stabilisce nessi necessari tra proprietà, verità logicamente necessarie. Quando diciamo: "In un triangolo, la somma degli angoli interni fa 180°", affermiamo che in qualsiasi triangolo, necessariamente, vale questa proprietà. Non è quindi una verità contingente, stabilita per constatazione empirica, constatazione che sarebbe impossibile effettuare negli infiniti casi esistenti. È una *verità necessaria*, stabilita a priori dell'osservazione o dell'esperienza, per necessità logica: dalla nostra definizione di triangolo e dai principi primi della geometria discende deduttivamente questo fatto.

Stabilire una volta per tutte verità necessarie è uno degli elementi di fascino della matematica. Ribadiamo: ciò che è stabilito non è la verità isolata di una proprietà, ma piuttosto il nesso, l'implicazione tra due proprietà: se – allora. Se questa figura è un triangolo piano, allora...

In questo senso ipotetico-deduttivo, la matematica si applica anche al mondo fisico: se realizziamo un triangolo con un foglio di compensato, se quello è piano, allora posso affermare che la somma degli angoli interni sarà di 180°: non è possibile costruirne uno in cui la somma degli angoli faccia 200°; se fisicamente è un triangolo ed è piano, necessariamente la somma degli angoli interni è di 180°, inutile cercare espedienti artigianali per violare questa legge: so già che è impossibile.

Notiamo che l'applicazione della matematica alla realtà fisica richiede un ulteriore elemento che è un atto di giudizio: io giudico che quello ritagliato nel compensato sia un triangolo, e che il compensato sia piano, non curvo. Questo è un giudizio sulla realtà fisica, non è più una deduzione. È importante tenere presente questo aspetto quando si insegnano le scienze, utilizzando anche strumenti matematici: occorre distinguere i ruoli di osservazione sperimentale, il giudizio sulla realtà, la deduzione matematica. Questo affiancarsi alla deduzione matematica di giudizi sulla realtà e osser-

vazione della realtà, immette un elemento di *contingenza* e anche, in un certo senso, di *incertezza*, nelle affermazioni scientifiche, o comunque empiriche, che la matematica contribuisce a stabilire, il che faceva dire già a Einstein: "Fin quando le nostre leggi della matematica si riferiscono alla realtà, esse non sono certe; e fin quando sono certe, non si riferiscono alla realtà". (Einstein 2010)

Ma proseguiamo sul filo principale del discorso circa il metodo della matematica, e chiediamoci: *come* la matematica stabilisce la verità di una certa implicazione, di un certo teorema? Attraverso la *dimostrazione*. Si può far coincidere l'invenzione della matematica con l'invenzione della dimostrazione. Noi sappiamo che il teorema di Pitagora, come elemento di conoscenza, come enunciato, magari in qualche suo caso particolare, è noto da millenni, ma diciamo che la matematica, come noi la intendiamo, nasce in Grecia tra il VI e il III secolo a.C. perché quello è il contesto in cui nasce la dimostrazione. Noi riteniamo che Pitagora sia stato il primo a dimostrare il suo teorema, e sappiamo per certo che Euclide ne ha dato una dimostrazione, inserendo quel teorema nel corpo di una teoria, un intero sistema, un grande disegno in cui un passo dopo l'altro dai principi primi si deducono via via le conseguenze.

Ora, come avviene la dimostrazione? Come possiamo mostrare che in tutti gli infiniti triangoli rettangoli vale una certa proprietà? Non passando in rassegna ciascun triangolo, ma piuttosto eseguendo un ragionamento che sia valido per un *generico* triangolo rettangolo; per un triangolo rettangolo qualsiasi, cioè: *per un oggetto che si suppone unicamente soddisfare quelle (poche) proprietà che definiscono il concetto di triangolo rettangolo*. Qualsiasi concreto triangolo rettangolo avrà qualche proprietà speciale, ma nei passi del ragionamento noi ci appoggiamo solo a quelle che valgono per ciascuno di essi. Questa *universalità* è resa possibile dall'*astrazione*: il concetto di triangolo rettangolo è astratto, è stato definito isolando poche proprietà, comuni a tutti i triangoli rettangoli concreti. Notiamo quindi che *quel tratto caratteristico, potente, della dimostrazione, ossia la possibilità di stabilire per sempre e oltre ogni ragionevole dubbio, con un ragionamento di un numero finito di passi, ciò che una vita intera non basterebbe a verificare empiricamente caso per caso, è resa possibile dalla natura astratta degli oggetti matematici, definiti da poche proprietà astratte*.

Raccogliamo da questa prima veloce analisi alcuni punti fermi:

- la matematica normalmente non si occupa di oggetti singoli, ma di totalità di oggetti, insiemi (spesso infiniti) di oggetti (per esempio i triangoli);
- oggetti di un certo tipo sono definiti astrattamente mediante (solitamente poche) proprietà astratte comuni;
- la dimostrazione di una "implicazione universale" ("Per ogni oggetto di tipo x , se vale la proprietà p allora vale la proprietà q ") viene compiuta considerando il generico oggetto di tipo x che soddisfa la proprietà p , e deducendo da questo che necessariamente deve valere la proprietà q .

Potremmo quindi provare a dire di che cosa, in generale, si occupa, o meglio si può occupare, la matematica come disciplina, e tentare così di dare una definizione di matematica che comunichi qualcosa tanto del metodo quanto del contenuto: la matematica è la disciplina che studia le classi di oggetti che è possibile definire (compiutamente) precisandone (poche) proprietà astratte. Attorno a questi oggetti stabilisce, mediante dimostrazione logica, delle verità necessarie, solitamente espresse da implicazioni tra proprietà.

Nella sua vaghezza, questa definizione credo comunichi qualcosa delle caratteristiche importanti della matematica, e ne delimiti un po' il campo. È vero che qui non si dice che la matematica parla di numeri, o di triangoli, o di funzioni, difatti in un certo senso la matematica potrebbe parlare di qualsiasi cosa. Ma, in effetti, l'insieme di tutti i triangoli si può definire compiutamente con poche proprietà astratte, l'insieme di tutti i cavalli no, e difatti la matematica non ha teoremi sui cavalli.

Nota bene: si può obiettare all'ultima affermazione fatta (la matematica non ha teoremi sui

cavalli) dicendo che in effetti noi possiamo *applicare* teoremi matematici anche a oggetti concreti; quando facciamo questo, però, valgono le avvertenze già fatte sul margine di incertezza che rimane, per cui in pratica le nostre affermazioni non sono più valide in modo così universale e a priori. Inoltre, quando applichiamo un risultato astratto a una cosa concreta, noi non stiamo considerando la cosa concreta in *tutti* i suoi aspetti; piuttosto, usando il punto di vista specifico della matematica, stiamo *ritagliando nella cosa concreta un oggetto astratto*, che legge solo alcune delle caratteristiche di quella cosa concreta, prescindendo da tutte le altre.

Per quanto riguarda l'uso che ho fatto del termine *verità* (nel dire che la matematica stabilisce delle verità necessarie attorno ai propri oggetti), se è chiaro il contesto in cui ci stiamo collocando (proposizioni vere, nel senso della logica deduttiva, riguardanti oggetti definiti in modo astratto), questo credo non dovrebbe destare particolari problemi o fraintendimenti. Il problema di cosa significhi verità in matematica emerge quando si discute dei suoi fondamenti, meno quando si discute della sua pratica quotidiana. Credo che spesso i problemi che sorgono attorno all'affermazione della verità delle proposizioni matematiche nascano, in effetti, dalla poca chiarezza su un altro aspetto, che è quello del rapporto matematica-realtà, e del valore conoscitivo della matematica, a cui ora dedichiamo un po' di attenzione.

Matematica e conoscenza

Quanto abbiamo detto sulle caratteristiche della matematica come sapere organizzato, introduce in modo naturale il tema del ragionamento matematico e, in particolare, il tema del linguaggio, su cui ci dovremo soffermare. Ma, invece di entrare subito in questo tema, apro ancora una parentesi per affrontare un tema che viene vissuto da molti come un'obiezione al valore della matematica (potrebbe accadere anche a chi la insegna). Vorrei ora documentare in che senso *la matematica è una forma di conoscenza della realtà*, rispondendo ad alcune tipiche obiezioni che si fanno a questa tesi. Se questo non è chiaro anzitutto a chi insegna matematica, e poi a chi la studia, non può esserci una vera stima di questa disciplina, e quindi una stima del valore che ha l'impegnare la nostra ragione nella matematica.

Se fosse così qualsiasi discorso sul ragionamento matematico si ridurrebbe a una serie di consigli su come ben addestrare a certe abilità. Queste obiezioni solo a volte sono fatte in modo esplicito; più spesso rimangono implicite, come incrostazioni di pregiudizi che non vengono mai messi in discussione.

Sapere ipotetico deduttivo e conoscenza

La prima obiezione si può esprimere così: *un sapere ipotetico-deduttivo (come la matematica) può essere conoscenza?*

A sua volta, questa obiezione ha due aspetti diversi, si dettaglia in due obiezioni:

La prima: *Se le tue conclusioni sono solo svolgimento logico di quanto contenuto nelle premesse, alla fine – in fondo – non hai niente di nuovo.*

Questa è un'obiezione tanto comune quanto superficiale; un'obiezione che è davvero fuori dalla realtà. Noi non siamo esseri superiori che vedono a colpo d'occhio tutte le conseguenze delle premesse. Trarre le conseguenze delle premesse per noi può essere il lavoro faticoso di una vita.

Andare dall'osservazione della biglia che rotola sul piano inclinato al lancio di un'astronave è poca cosa? O dagli assiomi dei numeri naturali alla dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, che ha richiesto 300 anni di sforzi? Se, dopo aver fatto un po' di questo lavoro, ti guardi indietro,

vedi che prima non sapevi che certe premesse hanno certe conseguenze, ora lo sai. Se prima non lo sapevi e ora lo sai, la tua conoscenza è aumentata. Quindi il metodo ipotetico-deduttivo è un metodo di conoscenza.

La seconda obiezione rivolta alla matematica come sapere ipotetico-deduttivo è la seguente: *Se stabilisci solo dei nessi logici, delle verità ipotetiche, in fondo non concludi mai la verità di nulla*. Certo, dire: "Se vale questo, allora vale quello", apre ovviamente il problema di quali sono le premesse da cui partire, visto che non possiamo risalire all'infinito nelle nostre deduzioni. Questa è un'obiezione più seria, che porta all'eterna discussione: le nostre premesse sono verità evidenti o sono pure convenzioni? Rimando ancora ad Agazzi 1961 e Bramanti 1991 per un approfondimento di questi temi, e mi limito qui a qualche osservazione.

In effetti c'è stata un'evoluzione storica del nostro modo di concepire il ruolo delle premesse nella matematica. Se per Euclide, 2300 anni fa, le premesse del discorso (assiomi o postulati) erano verità evidenti, a partire dal XIX secolo, sotto l'influsso prima della scoperta delle geometrie non euclidee e poi per vari altri fattori, si iniziò a sottolineare il ruolo delle premesse come pure e semplici "regole del gioco", oggetto di convenzione. Attenzione a non intendere troppo frettolosamente questa svolta come l'approdo a una posizione relativista. Il punto di vista contemporaneo prende atto che viviamo in un mondo complesso, in cui, a seconda di qual è il pezzo di realtà che ci interessa studiare e il punto di vista da cui ci interessa studiarlo, dobbiamo scegliere opportunamente le premesse della teoria. Ciò che dal punto di vista formale è "solo una convenzione", dal punto di vista del rapporto tra la teoria e la realtà è invece oggetto di osservazione, riflessione, valutazione e scelta. E questo, se vogliamo, è sempre stato vero.

La novità che i tempi moderni hanno portato è la sottolineatura del fatto che questa scelta non si fa una volta per tutte, ma caso per caso: se voglio studiare la geometria delle figure disegnate sulla superficie della sfera, le premesse saranno diverse da quelle che farei per studiare le figure disegnate nel piano: nel primo caso il 5° assioma di Euclide non vale, la somma degli angoli interni di un triangolo non fa 180° ma di più, il teorema di Pitagora non vale, e così via. Un grande cambiamento di prospettiva, certo, ma non il crollo di ogni certezza o simili.

Il metodo ipotetico-deduttivo della matematica rivela storicamente la sua potenza nella comprensione della realtà fisica quando, a partire dal 1700 e oggi più che mai, si unisce alla scienza moderna, matematizzata. La scelta, volta per volta, delle premesse valide, diventa la modellizzazione matematica dei concetti e fenomeni fisici. Questa scelta è un esercizio di giudizio compiuto dallo scienziato che applica la matematica. La storia dimostra che questo nostro "esercizio di giudizio" è stato ed è estremamente utile alla descrizione, comprensione e previsione dei fenomeni. La matematica, unita all'osservazione della realtà, ha dimostrato di offrire un potentissimo strumento di conoscenza della realtà, anche fisica.

Quello che emerge, stando di fronte alla storia della matematica e della scienza, è quella sorprendente efficacia della matematica nella comprensione del mondo fisico, di cui tanti autori si sono giustamente meravigliati. Allo stupore di molti, Benedetto XVI ha aggiunto un commento profondo, che è stato tra gli spunti iniziali che hanno messo in moto la mostra sulla matematica al Meeting di Rimini 2010 (cfr. Aa.Vv. 2010): "Una caratteristica fondamentale delle scienze moderne è l'impiego sistematico degli strumenti della matematica per poter operare con la natura. La matematica come tale è una creazione della nostra intelligenza: la corrispondenza tra le sue strutture e le strutture reali dell'universo suscita la nostra ammirazione e pone una grande domanda. Implica infatti che l'universo stesso sia strutturato in maniera intelligente, in modo che esista una corrispondenza profonda tra la nostra ragione soggettiva e la ragione oggettivata nella natura. Diventa allora inevitabile chiedersi se non debba esservi un'unica intelligenza originaria, che sia la comune fonte dell'una e dell'altra. Così proprio la riflessione sullo sviluppo delle scienze ci riporta verso il Logos creatore.

Viene capovolta la tendenza a dare il primato all'irrazionale, al caso e alla necessità, a ricondurre a esso anche la nostra intelligenza e la nostra libertà" (Benedetto XVI 2006).

Il carattere ipotetico-deduttivo della matematica quindi non le toglie affatto il suo valore conoscitivo anche verso la realtà fisica.

Astrazione e conoscenza

Quanto detto fin qui risponde anche a *un'altra obiezione frequente che si fa al valore conoscitivo della matematica, obiezione basata sull'aspetto dell'astrazione matematica*: "Tu non parli della realtà, ti occupi di cose astratte". *Quindi, come può essere conoscenza un discorso che non parla della realtà?*

Abbiamo visto come l'astrazione sia una caratteristica degli oggetti matematici che rende possibile lo stabilire verità necessarie attorno a essi (è un punto di forza del suo metodo). In secondo luogo, l'astrazione matematica è una lettura sintetica della realtà concreta, uno sguardo che coglie gli aspetti profondamente comuni presenti in tante realtà concrete. E questa è una forma di comprensione e conoscenza della realtà, *che avviene in matematica come in ogni altra disciplina del pensiero*, perché in ogni ambito della conoscenza la ragione non fa molti passi senza usare *anche* delle categorie astratte. In questo senso possiamo anche dire che *l'astrazione è un punto di vista, un punto di osservazione sulla realtà concreta*, non una negazione della o un disinteresse per la realtà concreta.

Infine, abbiamo visto come l'astrazione matematica, unita all'osservazione della realtà e alla riflessione scientifica, permetta una potentissima forma di conoscenza, comprensione, previsione e manipolazione della realtà fisica.

Abbiamo detto che l'uso dell'astrazione è una forma di conoscenza della realtà che pratichiamo in ogni disciplina: le categorie storiche, o politiche, o letterarie, che usiamo in queste discipline non sono "meno astratte" delle categorie matematiche, sono piuttosto *tipi diversi di astrazione*. Non ha senso, quindi, giustificare la propria freddezza nei confronti della matematica "perché è astratta": utilizziamo continuamente astrazioni nella nostra conoscenza della realtà. Comprendere meglio certi concetti astratti e le loro relazioni è conoscenza, non meno che conoscere le viti e i bulloni. Si dice allora: sì, ma l'astrazione di certi concetti storici, politici ecc., serve a capire la realtà, *c'entra* con la realtà di tutti i giorni. E l'astrazione matematica no? È la base di infinite applicazioni scientifiche e tecniche, senza le quali non useremmo il cellulare, non ascolteremmo musica, non manderemmo una e-mail, non ci sposteremmo se non a piedi. E sta alla base di tanti aspetti della nostra percezione della realtà (spazio, tempo, relazioni...).

Ragionamento matematico e linguaggio

Abbiamo fatto un discorso sulla natura del metodo matematico anzitutto per iniziare a collocarlo nel contesto più ampio della ragione, per dare qualche spunto per comprendere il ruolo della matematica nel complesso della conoscenza e il rapporto con altre forme di conoscenza e di ragionamento. Proseguendo su questa linea arriviamo a un'osservazione che introduce un altro tema.

"La matematica – osserva Alfred Whitehead – come scienza iniziò quando qualcuno, probabilmente un greco, dimostrò proposizioni riguardanti 'qualsiasi' cosa o riguardanti 'almeno una' cosa, senza specificare oggetti particolari".

Il fatto che la matematica si occupi principalmente di insiemi di oggetti anziché di oggetti singoli, introduce immediatamente una specificità del ragionamento matematico rispetto al ragionamento comune. Nel linguaggio comune è normale fare affermazioni attorno a oggetti singoli, ad esempio quella finestra. Posso dire che quella finestra è aperta o è chiusa. Ma se io chiedo: "Le finestre di questa stanza sono aperte o chiuse?", le risposte possibili non sono più solo due: "Tutte le finestre sono aperte"; "Almeno una finestra è aperta"; "Nessuna finestra è aperta". Questa è la situazione più comune nel ragionamento matematico: "Per ogni x vale la proprietà $p(x)$ "; "Esiste almeno un x per cui vale la proprietà $p(x)$ "; "Per ogni x non vale la proprietà $p(x)$ ". Non che queste cose non possano entrare anche nei ragionamenti della vita quotidiana, ma in matematica occorrono molto più di frequente.

Usiamo continuamente i quantificatori "esiste", "per ogni", e questa è una difficoltà specifica del ragionamento matematico. Detto con linguaggio logico: nei ragionamenti quotidiani, utilizziamo spesso quelle che la logica chiama "proposizioni atomiche" come "questa finestra è aperta". In matematica se ne usano poche (un esempio è: "il numero 5 è dispari"; non diciamo spesso frasi così semplici); le proposizioni matematiche sono ottenute normalmente utilizzando proprietà che contengono *variabili*: la proposizione "Tutte le finestre di questa stanza sono aperte" ha la struttura logica "Per ogni finestra x di questa stanza, x è aperta", cioè "per ogni x nell'insieme S , vale la proprietà $p(x)$ ". Come ha ben evidenziato Bertrand Russell, la nozione di *variabile* è la vera regina della logica matematica, e della matematica stessa.

La centralità della logica predicativa (quella che usa proprietà, contenenti variabili) è una difficoltà (e non solo una caratteristica) del ragionamento matematico, sia perché è chiaro che ci risulta più difficile qualcosa a cui siamo meno abituati dalla vita di tutti i giorni, sia perché la logica predicativa è intrinsecamente più sottile della logica proposizionale in quanto ha a che fare con gli insiemi infiniti. Difatti Hermann Weyl chiama *logica finita* la logica proposizionale, e *logica transfinita* la logica predicativa. Si può dire che l'infinito entri *costitutivamente* nella matematica, prima ancora che con il riconoscimento esplicito e consapevole dell'importanza, nella pratica matematica, dei procedimenti infiniti o degli insiemi infiniti, attraverso *l'infinito della generalità*, l'infinito del "per ogni". Ancora Weyl dice che la matematica si può definire come "scienza dell'infinito".

Così come parlare di che cos'è la matematica ci ha portato immediatamente a parlare del metodo matematico, del ragionamento matematico, abbiamo visto che parlare di ragionamento matematico ci conduce inesorabilmente a parlare del *linguaggio logico-matematico*: proposizioni, proprietà, variabili, quantificatori. Weyl scrive: "La logica è l'igiene che il matematico usa per far sì che le sue idee restino sane e robuste" (Weyl 2009).

Si capisce dal discorso precedente come *il ragionamento matematico richieda un'attenzione logica al linguaggio*. Utilizzare correttamente i quantificatori, non lasciarli impliciti (magari nell'articolo indeterminativo "un") usare in modo non ambiguo la "o" (esclusiva o non esclusiva?), costruire in modo corretto la negazione di una proposizione, comprendere cosa afferma una implicazione e che cosa esattamente è incompatibile con essa e così via, sono elementi necessari al ragionamento matematico. Non sono preliminari, da trattare in qualche lezione introduttiva, nelle prime pagine dei libri di testo, solo perché si usa far così, sono la stoffa di ogni ragionamento matematico. Ma diciamo qualcosa di più: il ragionamento matematico non solo richiede un'attenzione logica al linguaggio; il ragionamento matematico *si nutre di un amore per il linguaggio*. Senza amore per il linguaggio, la matematica resterà sempre un'estranea. Un certo uso delle parole non nasce dalla paura dell'errore (cioè dalla paura della "malattia") ma dall'amore per il linguaggio, cioè per la verità, per la conoscenza, e per la *comunicazione con altri esseri umani*. Apprezzare (e far apprezzare) le differenze specifiche del linguaggio matematico rispetto ad altri linguaggi disciplinari è importante per accettare (e far accettare) certe sottolineature e attenzioni non come una "deformazione men-

tale" ma come un giusto adeguamento del metodo all'oggetto di studio. Apprezzare un sapere come quello matematico, che attraversa il tempo e lo spazio, con una tradizione vivente che prosegue da 2500 anni in tutto il mondo, non è possibile senza un interesse alla comunicazione tra le persone, una cura per il linguaggio scritto e parlato come condizione necessaria per la comunicazione tra le persone.

Il linguaggio matematico e i linguaggi matematici specifici

Ma il linguaggio in matematica non è solo un certo uso della logica. C'è un altro aspetto del linguaggio, direttamente legato ai *contenuti matematici*. Si può dire anzi che l'insegnamento della matematica a scuola, dalle elementari alle superiori, consista in misura importante nell'insegnamento di certi *linguaggi specifici* della matematica:

- la scrittura dei numeri;
- il linguaggio dell'algebra, o del "calcolo letterale";
- la geometria analitica;
- il linguaggio degli insiemi e le funzioni

sono esempi di linguaggi matematici specifici che costituiscono una parte importante dell'insegnamento della matematica a scuola. Per diverse volte nell'arco dell'età scolastica, l'allievo è introdotto a un nuovo linguaggio, con cui affronterà un nuovo contesto. In ciascuno di questi nuovi contesti molto spesso non si arriva lontano: grandi teorie, grandi teoremi, non se ne vedono spesso a scuola, se si toglie la geometria euclidea e un po' di analisi matematica alla fine dei licei. Questo è uno dei motivi per cui la matematica della scuola viene spesso associata al fare esercizi, agli aspetti procedurali, di tecniche, formule eccetera, più che all'aspetto di teoria ipotetico deduttiva fatta di definizioni, teoremi, dimostrazioni. Certamente un maggior peso, nella matematica scolastica, dell'aspetto ipotetico deduttivo (definizioni, teoremi, dimostrazioni), non potrebbe che giovare sia all'educazione del ragionamento nei ragazzi, sia alla reputazione della matematica tra di loro, o almeno tra i più intellettualmente vivaci di loro. Ma occorre anche capire e valorizzare fino in fondo il ruolo dei vari linguaggi matematici specifici che sono insegnati a scuola, per apprezzare il fatto che insegnare e imparare questi linguaggi è molto di più che un addestramento tecnico.

Prendiamo ad esempio il linguaggio algebrico, del calcolo letterale: il concetto di incognita, l'idea di formalizzare un problema mediante un'equazione, la scrittura simbolica e il "calcolo letterale"...

Se riflettiamo su queste idee, magari avendo anche un'idea della fatica con cui storicamente sono emerse nell'arco di secoli (la storia della matematica non è un optional per pochi curiosi: un minimo di storia delle idee dovrebbe essere conosciuta almeno da chi *insegna* la matematica, se vogliamo avere consapevolezza dell'originalità di certe idee e delle difficoltà con cui vi si è arrivati), vediamo che *il linguaggio matematico non è semplicemente un modo per comunicare certe idee, ma è esso stesso il luogo in cui risiedono certe idee. Il linguaggio incorpora in sé progressi, idee, giudizi, astrazioni frutto di una lunga storia*. Ad esempio, quando certi problemi formulati nel linguaggio quotidiano vengono formalizzati con una semplice equazione di primo grado, ci appaiono banali, mostrano da sé la strada per la propria soluzione. In realtà il problema non può essere considerato banale di per sé; piuttosto, si può dire che in quel caso *il linguaggio si sia fatto carico della maggior parte del lavoro necessario a risolvere il problema*. Dire questo non è come dire che la fatica l'ha fatta la lavagna, o la penna: "il linguaggio" non è qualcosa di impersonale, è uno dei frutti di 2500 anni di storia e di tradizione matematica. Il linguaggio ricapitola i progressi concettuali di tutta una storia, e ci fa vedere le cose "dalle spalle dei giganti". Ma se è stato faticoso arrivarci per l'umanità, se è stata una conquista di secoli, sarà faticoso anche oggi per chi lo incontra per la prima volta, e

questo dice della pazienza e accortezza che occorre avere nell'insegnare queste cose, e anche della grande dignità che queste cose hanno. Altro che "banale equazione di primo grado"!

Momenti del ragionamento matematico

Dovremmo ora esaminare più da vicino il ruolo che hanno certi elementi specifici del discorso matematico, che possiamo vedere come momenti diversi del ragionamento matematico, o come i diversi tipi di *testo* che troviamo in matematica. Quattro aspetti significativi mi sembrano i seguenti: *la definizione; il teorema e la dimostrazione; l'esempio e il contreesempio; il problema e l'esercizio.*

Alcuni di questi aspetti sono legati trasversalmente anche al ruolo della *motivazione* nell'insegnamento e apprendimento della matematica, e del *rapporto con la realtà* nel ragionamento matematico.

Una conclusione. Si può insegnare a ragionare?

Non so se si può, ma *si deve*. Questo vuol dire che c'è un metodo che garantisce che tutti imparino a ragionare bene? Certamente no. Questo non dipende solo da noi. Ma non possiamo usarla come scusa per non insegnare a ragionare. Insegnare il metodo di una certa disciplina, richiede nell'insegnante, anzitutto, una *consapevolezza* del metodo stesso, che è qualcosa di più della *padronanza* del metodo. Non basta che io ragioni bene, occorre che sia diventato consapevole dei modi, delle forme del mio ragionare; occorre una riflessione e un'esperienza di *introspezione*, coltivata per il piacere di capire che cosa è servito a me per capire, qual era l'origine della mia incomprensione, del mio errore, che cosa mi aiuta a fare passi veloci, che cosa mi rallenta. Occorre poi la capacità di *immedesimazione*, il desiderio e l'attenzione di capire il ragionamento dell'altro, la fatica altrui, l'errore o il fraintendimento altrui, e che cosa invece aiuta la persona che ho davanti a capire, cosa la mette in moto. Tutto questo è un lavoro che avviene *dentro* l'insegnante, anche se nel rapporto con gli allievi. Poi c'è il lavoro che l'insegnante fa in aula, quindi *con* gli allievi, e il lavoro che sollecita *negli* allievi. Penso che il metodo, il ragionare, non si insegni *esclusivamente* dando il buon esempio di "metodo in azione"; questo è necessario, lo pensano tutti, a volte può essere anche sufficiente, ma *non è l'unica arma* che abbiamo. Abbiamo anche la possibilità di fare un lavoro espressamente mirato ad aiutare l'affinamento del metodo in chi abbiamo davanti; un tempo espressamente dedicato a un lavoro sul metodo, sul ragionamento. Che non è un lavoro "preliminare" che si fa una volta per tutte, e poi finalmente si passa oltre e ci si dedica ai contenuti; non sono i preamboli del corso. Può avere una collocazione naturale, speciale, all'inizio di un corso, di un anno, all'incontro con una nuova classe, e così via, ma poi è utile che continui in dosi calibrate anche più avanti, in modo che il metodo sia messo in gioco sui contenuti veri, non sui preamboli. Il libro *Matematica. Questione di metodo* (Bramanti e Travaglini 2009) è un tentativo di fornire uno strumento di lavoro mirato specificamente all'educazione del ragionamento matematico, rivolto agli studenti di fine scuola superiore in vista dell'università. È uno strumento concreto che indico, perché la raccomandazione a dedicare tempo ed energie a un esercizio specifico di educazione al ragionamento matematico rimane vuota, senza avere a disposizione anche un serbatoio di esempi, esercizi, osservazioni, percorsi possibili.

Riferimenti bibliografici

- Aa.Vv., 2010, *Da uno a Infinito. Al cuore della matematica*, Editore Frimedia, Meda (catalogo della mostra presentata dall'Associazione Euresis al Meeting di Rimini 2010).
- Agazzi E., 1961, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano.
- Benedetto XVI, 2006, *Discorso ai partecipanti al IV Convegno Nazionale della Chiesa Italiana*, Verona, 19 ottobre.
- Bramanti M., 1991, *Mani che disegnano. Note sul problema dei fondamenti in matematica*, scaricabile al link: http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/corsi/accademia_materiale_bramanti.htm
- Bramanti M., 2011, *I linguaggi matematici: idee e simboli*, "Emmeciquadro", 42.
- Bramanti M., Travaglini G., 2009, *Matematica. Questione di Metodo*, Zanichelli, Bologna.
- Cooke R., 2013, *The history of mathematics. A brief course*, Wiley, New York.
- Courant R., Robbins H., 2000, *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Derbshire J., 2006, *Unknown quantity. A real and imaginary history of algebra*, Joseph Henry Press, Washington.
- Einstein A., 2010, *Sidelights on Relativity*, Dover Publications: 12.
- Manara R., 2002, *La matematica e la realtà. Linee di metodo*, Marietti 1820, Genova.
- Rigotti E., 2009, *Conoscenza e significato. Per una didattica responsabile*, a cura di Mazzeo R., Mondadori, Milano.
- Russell B., 1989, *I principi della matematica*, Newton, Roma.
- Weyl H., 2009, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton.