

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
“Francesco Brioschi”
POLITECNICO DI MILANO

**Passeggiate aleatorie, laplaciano
discreto e applicazioni**

di

Marco BRAMANTI

n.51 / R, maggio 2006



Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano (Italy)

Passeggiate aleatorie, laplaciano discreto e applicazioni

Lavoro di stage svolto dagli studenti:

Elisa Arduca, Luca Bonanomi, Francesca Corno,
Simone Mandelli, Daniele Redoglio, Giovanni Rosotti

Liceo Scientifico “don Gnocchi” di Carate Brianza,
Classe 4^a-5^a, AA.SS. 2004/05 e 2005/06

Docenti:

Paola Balzarotti, Paolo Teruzzi

Tutor:

Marco Bramanti

Attività svolta nell’ambito dell’iniziativa “Progettiamo con la matematica” del
Laboratorio di Formazione Matematica e Sperimentazione Didattica,
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
<http://fds.mate.polimi.it/>

Il testo di questo Quaderno ed il Software qui descritto sono scaricabili dalla pagina web:
<http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi.htm>

INDICE

<i>1. Introduzione. Il moto Browniano</i>	3
<i>2. Richiami di probabilità nel discreto.</i>	5
<i>3. Variabili aleatorie discrete</i>	7
<i>4. Valore atteso di una variabile aleatoria</i>	7
<i>5. La passeggiata aleatoria nel piano.</i>	9
<i>6. La passeggiata aleatoria di n passi come sequenza di prove indipendenti.</i>	10
<i>7. Variabili aleatorie legate alla passeggiata aleatoria.</i>	10
<i>8. Il valore atteso delle variabili legate alla passeggiata aleatoria</i>	11
<i>9. Descrizione della simulazione e dei risultati ottenuti.</i>	12
<i>10. Passeggiata aleatoria in un dominio e istante di prima uscita.</i>	13
<i>11. Istante di prima uscita da un dominio limitato.</i>	14
<i>Il gioco delle scommesse sul punto di prima uscita.</i>	14
<i>12. Laplaciano discreto.</i>	17
<i>13. Laplaciano continuo</i>	19
<i>14. Software di simulazione della passeggiata aleatoria.</i>	30
<i>15. Conclusioni.</i>	36
<i>16. Bibliografia.</i>	36
<i>17. Ringraziamenti</i>	36
<i>APPENDICE 1 – IL MOTO BROWNIANO</i>	37
<i>APPENDICE 2 – SOFTWARE – GUIDA ALL'USO</i>	43

1. Introduzione. Il moto Browniano

Il moto browniano è un fenomeno fisico scoperto dal botanico Robert Brown nel 1828: osservando al microscopio una goccia d'acqua contenente granuli di polline, notò che questi si agitavano senza sosta in maniera caotica. Negli anni successivi si tentò di dare varie spiegazioni al fenomeno senza successo, finché nel 1877 Delsaux propose l'ipotesi che questo moto fosse dovuto agli urti casuali tra i granuli di polline e le molecole d'acqua, che, come prevede la *teoria cinetica del calore*, si agitano tanto più quanto maggiore è la temperatura dell'acqua.

Nel 1905 A. Einstein pubblicò un articolo nel quale, a partire da questa ipotesi, il fenomeno veniva spiegato analiticamente, arrivando anche a fare previsioni quantitative riguardanti il moto. Nel 1908 Perrin verificò sperimentalmente le formule ricavate da Einstein e, come applicazione di queste, arrivò ad una determinazione più precisa del *numero di Avogadro*.

Dal punto di vista fisico, ciò che rende interessante il moto browniano è il fatto che mette in relazione fenomeni che accadono su due scale di grandezze molto diverse: da una parte, il moto del granulo di polline che, per quanto piccolo, è comunque ben visibile al microscopio; dall'altra, quello delle molecole d'acqua, che sono molto più piccole (con gli strumenti di 100 anni fa assolutamente invisibili). Ciò che la teoria cinetica del calore prevede riguardo all'agitazione termica delle molecole d'acqua, e che non sarebbe direttamente osservabile, ha però un effetto osservabile sul moto del granulo di polline: a questo modo la teoria cinetica del calore, che nel 1905 non era ancora universalmente accettata come valida, poté avere una significativa verifica sperimentale. Questo è uno dei motivi per cui il lavoro di Einstein sul moto browniano fu importante per la storia della fisica.

Più in dettaglio, vediamo cosa afferma la relazione quantitativa dedotta da Einstein. Supponiamo di osservare il moto di una singola particella (granulo di polline) per un certo tempo τ : anche se non riusciamo a seguirne esattamente la traiettoria, pensiamo di poter misurare la distanza tra la posizione iniziale e finale della particella (spostamento), in questo intervallo di tempo. Ripetiamo l'osservazione per molte particelle, sempre in un intervallo di tempo di durata τ , e calcoliamo il valor medio dei quadrati degli spostamenti: questo valor medio si chiama *spostamento (o cammino) quadratico medio*, e si indica con Δ^2 . Ora, la relazione fondamentale di Einstein afferma che

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\tau} = D \quad (1)$$

dove la costante D , detta coefficiente di diffusione, può essere calcolata indipendentemente dall'osservazione del moto; infatti, supponiamo che i granuli di polline siano delle sferette di raggio ρ , il liquido abbia un coefficiente di viscosità η e temperatura assoluta T , N_{av} sia il numero di Avogadro, e R la costante dell'equazione dei gas perfetti. Allora:

$$D = \frac{RT}{N_{av} 6\pi\eta\rho} \quad (2).$$

La relazione quindi afferma che lo spostamento quadratico medio delle particelle è proporzionale al tempo, mediante una costante determinabile a priori. Per confronto, osserviamo che nel moto rettilineo uniforme è lo spostamento (e non il suo quadrato!) ad essere proporzionale al tempo. La relazione di Einstein afferma quindi qualcosa che non è ovvio: se sperimentalmente si verifica che è corretta, questo è un buon argomento a favore della teoria da cui è stata dedotta.

Un'altra conseguenza della relazione di Einstein è che, se misuriamo Δ^2 e τ , possiamo poi calcolare il valore di D dalla (1), invece di calcolarlo a priori. Questo vuol dire che se nella (2) sono note tutte le costanti tranne una, quest'ultima può essere determinata dall'equazione. Ad esempio, come fece Perrin, si può determinare (meglio di quanto non fosse già noto) il numero di Avogadro N_{av} , oppure, noto questo, si può calcolare il raggio dei granuli di polline.

In appendice presentiamo la spiegazione del moto browniano data da Einstein in un articolo del 1908, più semplice del primo lavoro del 1905 su questo argomento. In questo articolo, l'Autore analizza il fenomeno della diffusione di un soluto in un solvente, arrivando alla stessa relazione vista.

Dopo Einstein, il moto browniano fu studiato da molti altri, da punti di vista diversi. In particolare, il fenomeno può essere descritto mediante la *teoria delle probabilità*: questo fu fatto ad esempio da Langevin nel 1908, Wiener nel 1923, Kolmogorov nel 1930. Il calcolo delle probabilità consente di porsi domande molto più specifiche sul moto di una singola particella: non solo qual è il suo cammino quadratico medio, ma, ad esempio, qual è la probabilità che in un certo tempo raggiunga una certa regione, ecc. Lo sviluppo di un modello matematico rigoroso e adeguato alla descrizione probabilistica di questo fenomeno portò allo sviluppo di una teoria matematica molto importante, *la teoria dei processi stocastici*, che a sua volta può essere applicata alla descrizione di molti fenomeni fisici, che non hanno niente a che vedere col problema iniziale del moto caotico di un granulo di polline in una goccia d'acqua. Questa teoria, tuttavia, è matematicamente difficile. In questo lavoro seguiremo invece questo percorso:

1. Introduciamo un modello molto semplificato del moto browniano, la cosiddetta "passeggiata aleatoria nel piano". Si tratta di un *modello discreto* anziché *continuo*, che tuttavia, come vedremo, conserva alcune caratteristiche importanti del moto browniano vero e proprio. In particolare, vedremo che la relazione di Einstein sul cammino quadratico medio varrà anche per la passeggiata aleatoria.
2. Per studiare le proprietà della passeggiata aleatoria, dovremo studiare un po' di calcolo delle probabilità (nel caso discreto).
3. A partire dalla passeggiata aleatoria nel piano, introduciamo i concetti di *laplaciano discreto* e *problema di Dirichlet per il laplaciano discreto*. Vedremo che il problema di Dirichlet, a cui siamo arrivati per via probabilistica, è in realtà un problema puramente algebrico: un sistema di k equazioni in k incognite, dove però, solitamente, k è molto grande.
4. Svilupperemo un piccolo software per simulare la passeggiata aleatoria nel piano, e mediante questo avremo un metodo per risolvere in maniera approssimata il problema di Dirichlet per il laplaciano discreto (*metodo di simulazione*).
5. Introduciamo poi, usando la nozione di *derivata approssimata* (che non fa uso dei concetti di *limite* e di *derivata* dell'analisi), l'operatore *laplaciano (approssimato) continuo*, e il problema di Dirichlet per questo operatore. Questo problema è un'approssimazione del modello matematico che governa molti fenomeni fisici interessanti.
6. Vedremo che il metodo di risoluzione approssimata del problema di Dirichlet per il laplaciano discreto permette di fornire una soluzione approssimata anche del problema di Dirichlet per il laplaciano continuo, che è fisicamente importante.
7. Confronteremo la soluzione approssimata trovata col metodo di simulazione con la soluzione esatta, in un caso in cui questa è nota, verificando quindi la bontà del metodo. Infine, useremo il metodo di simulazione per trovare la soluzione approssimata in un caso in cui non sono note formule esatte di risoluzione.

Concludendo, osserviamo che, così come dal punto di vista fisico lo studio del moto browniano è stato importante anche per la comprensione di fenomeni diversi da quello inizialmente studiato, anche dal punto di vista matematico questo lavoro mette in evidenza come lo studio del modello che regge il moto browniano si rivela inaspettatamente utile per lo studio di modelli di fenomeni completamente diversi.

2. Richiami di probabilità nel discreto.

Eventi e probabilità

Intenderemo con il termine di *esperimento aleatorio* un esperimento che, a priori, può avere diversi esiti possibili, ed il cui esito effettivo non è prevedibile con certezza.

Diamo inoltre le seguenti definizioni.

Def.1 Chiamiamo *eventi elementari* tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio, e *spazio campionario* l'insieme di tutti gli eventi elementari.

Qualunque sia l'esito di un esperimento aleatorio, uno ed un solo evento elementare si realizza. Se gli eventi elementari sono un numero finito o possono essere pensati come una successione, lo spazio campionario si dice discreto.

Def.2 Sia Ω uno spazio campionario discreto. Chiamiamo *evento* ogni sottoinsieme di Ω . Pertanto la totalità degli eventi possibili è rappresentata dall'insieme delle parti di Ω , che chiameremo $\mathcal{P}(\Omega)$.

La probabilità di un evento è un numero reale compreso tra 0 e 1 che misura il nostro grado di fiducia nel verificarsi di quell'evento. Attraverso il *calcolo delle probabilità* è possibile calcolare la probabilità di certi eventi complessi conoscendo in partenza la probabilità di altri eventi che consideriamo più semplici. Il criterio con cui si assegnano le probabilità a questi eventi più "semplici" può variare, ma la probabilità deve sempre obbedire ad alcune "regole" che ne costituiscono la definizione assiomatica.

Def.3 Sia Ω uno spazio campionario discreto. Si chiama *probabilità su Ω* una qualsiasi funzione $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0;1]$

Tale che

- i) $P(\Omega)=1$;
- ii) Vale la condizione di additività: se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di eventi a due a due disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$) allora $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

La coppia (Ω, P) viene detta *spazio di probabilità discreto*.

Da questi assiomi si deducono le seguenti proprietà.

Teorema: Proprietà della probabilità.

- i) $P(\emptyset)=0$;
- ii) $P(\bar{A})=1-P(A)$ dove \bar{A} è il complementare di A in Ω .
- iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ purché gli eventi A_i siano a due a due disgiunti.
- iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ per ogni coppia di eventi A e B.

Consideriamo ora il caso di uno spazio campionario finito. In molte situazioni è ragionevole ritenere che gli eventi elementari siano tutti equiprobabili. In generale, se Ω ha N elementi che chiamiamo ω_k ($k=1, \dots, N$), se imponiamo che gli eventi elementari siano equiprobabili, ovvero $P(\{\omega_k\}) = p$ per $k=1, \dots, N$, otteniamo:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_k \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=1}^N P(\{\omega_k\}) = pN, \text{ da cui } p=1/N.$$

Ora, se A è un evento qualunque, si avrà: $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\}) = p \cdot |A| = |A|/N = |A|/|\Omega|$, avendo

indicato con $|A|$ il numero degli elementi di A .

Abbiamo così ottenuto la nota definizione di probabilità classica secondo la quale la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Def. 5 (Probabilità condizionata). Sia B un evento di probabilità non nulla. Si chiama *probabilità dell'evento A , condizionata a B* , il numero: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

La definizione di probabilità condizionata traduce formalmente l'idea intuitiva di probabilità di un evento valutata sapendo che si è verificato un altro evento.

Teorema delle probabilità totali.

Sia A un evento e $\{B_j\}_{j=1}^n$ una partizione di Ω , cioè una famiglia di eventi tali che:

$$\text{i) } \bigcup_{j=1}^n B_j = \Omega.$$

$$\text{ii) } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ per } i \neq j.$$

$$\text{iii) } P(B_j) \neq 0 \text{ per ogni } j.$$

$$\text{Allora: } P(A) = \sum P(A/B_j) \cdot P(B_j).$$

Def.6 Due eventi A e B , di probabilità non nulla, si dicono **indipendenti** se soddisfano una delle seguenti tre condizioni equivalenti:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

Il significato intuitivo del concetto di indipendenza di eventi è chiaro soprattutto dalle due ultime condizioni: la probabilità di A sapendo che B si è verificato è uguale alla probabilità di A a priori. Possiamo generalizzare le definizioni di indipendenza di due eventi per definire il concetto di **famiglia di eventi indipendenti**.

Def.7 Si dice che n eventi A_1, A_2, \dots, A_n , costituiscono una famiglia di eventi indipendenti se valgono le seguenti condizioni:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \text{ per ogni coppia di indici } i \neq j$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \text{ per ogni } i, j, k \text{ diversi tra loro;}$$

$$\dots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

3. Variabili aleatorie discrete

Una *variabile aleatoria* è una quantità che può assumere valori diversi in dipendenza ad un evento casuale.

Def.8 Indicato con Ω uno spazio campionario discreto chiamiamo **variabile aleatoria discreta** una qualunque funzione $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$.

Ciò che ci interessa di una variabile aleatoria è calcolare la probabilità che essa assuma certi valori, per esempio ci può interessare qual è la probabilità che la variabile aleatoria discreta X assuma un valore $> a$, o che assuma un valore compreso tra a e b , o che assuma valori in un intervallo $I \subseteq \mathfrak{R}$

Notiamo che se Ω è uno spazio campionario finito $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$, anche X assumerà un numero finito di valori cioè:

$$X(\omega_k) = x_k \quad \text{con} \quad x_k \in \mathfrak{R}$$

N.B. Adotteremo la scrittura $(X \in I)$ con $I \subseteq \mathfrak{R}$, come abbreviazione della scrittura

$$\{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in I \}.$$

Ad esempio, scriveremo $P(X > a)$ come abbreviazione di $P(\{x \in \Omega : X(x) > a\})$.

Def. 9 Chiamiamo legge di una variabile aleatoria X la funzione che associa ad ogni intervallo $I \subseteq \mathfrak{R}$ il numero $P(X \in I)$. In particolare, definiamo

$$p_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Se è nota la funzione $p_X(x_k)$, possiamo calcolare $P(X \in I)$ per ogni intervallo $I \subseteq \mathfrak{R}$.

Def. 10 Due variabili aleatorie X, Y si dicono indipendenti se

$$P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J) \quad \forall I, J \subseteq \mathfrak{R}.$$

Più in generale n variabili aleatorie X_1, X_2, \dots, X_n si diranno indipendenti se scelti comunque n intervalli I_1, I_2, \dots, I_n , si ha: $P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \dots, X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in I_n)$.

4. Valore atteso di una variabile aleatoria

Def.11 Si dice *valore atteso* di una variabile aleatoria discreta X , il numero reale

$$EX = \sum_k x_k p_X(x_k) \quad (4)$$

a patto che la serie scritta converga. In caso contrario si dirà che X non ha valore atteso finito. La relazione suddetta è una somma o una serie a seconda che X assuma un numero finito o una successione di valori. Notiamo che, mentre sappiamo già che la serie $\sum_k p_X(x_k)$ converge ed ha

somma 1, nella relazione (4) le probabilità $p_X(x_k)$ sono moltiplicati per i valori x_k assunti da X che possono essere numeri reali qualunque (per esempio non è detto che abbiano tutti lo stesso segno). Questo è il motivo per cui non è scontata la convergenza della serie (4).

Se X è una variabile aleatoria che assume solo un numero finito N di valori, tutti equiprobabili (quindi di probabilità $1/N$ ciascuno) EX sarà semplicemente la media aritmetica dei valori assunti:

$$EX = \sum_{k=1}^N x_k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

Se i valori assunti da X non sono equiprobabili, la relazione (4) si può vedere come la media pesata dei valori assunti da X .

Proprietà del valore atteso.

Proposizione 1. Se X è una variabile aleatoria discreta, di valore atteso finito e a e b sono numeri reali

$$E(aX + b) = a(EX) + b.$$

In particolare il valore atteso di una costante (cioè della variabile aleatoria che assume un solo valore con probabilità 1) è la costante stessa.

Teorema – linearità del valore atteso. Se X_1, X_2, \dots, X_n sono n variabili aleatorie qualsiasi, con valore atteso finito, allora:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n.$$

Teorema. Se X_1, X_2, \dots, X_n sono n variabili aleatorie indipendenti con valore atteso finito, allora:

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = EX_1 \cdot EX_2 \cdots EX_n.$$

Teorema. (valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria) Se X è una variabile aleatoria e $f(t)$ è una funzione reale di variabile reale, allora $f(X)$ è una nuova variabile aleatoria, il cui valore atteso si può calcolare con la formula:

$$E[f(X)] = \sum_k f(x_k) p_X(x_k)$$

Il concetto di variabile aleatoria si generalizza nel caso di **vettore aleatorio**.

Def.12 Una variabile aleatoria a valori vettoriali (o vettore aleatorio o variabile aleatoria vettoriale) è un vettore di variabili aleatorie. Se $\underline{R} = (X, Y)$ è un vettore aleatorio, si pone: $E\underline{R} = (EX, EY)$ purché entrambi i valori attesi EX ed EY abbiano significato.

Proprietà del prodotto scalare dei valori attesi.

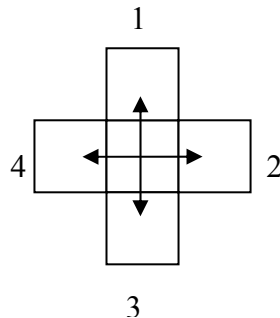
Dati $\underline{V}_1(X_1; Y_1)$ e $\underline{V}_2(X_2; Y_2)$ vettori aleatori indipendenti,

$$E(\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2) = E(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) = E(X_1)E(X_2) + E(Y_1)E(Y_2) = E(\underline{V}_1) \cdot E(\underline{V}_2)$$

In altre parole, se i due vettori aleatori sono indipendenti, il prodotto scalare dei valori attesi è il valore atteso del loro prodotto scalare.

5. La passeggiata aleatoria nel piano.

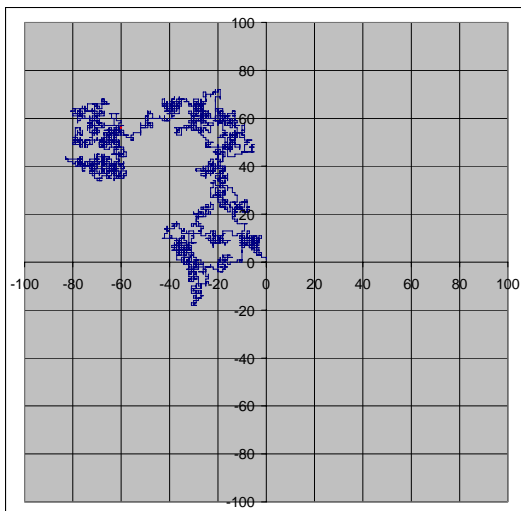
Consideriamo un esperimento aleatorio che ha 4 esiti possibili equiprobabili (come il lancio di un dado a 4 facce). Consideriamo una pedina che si muove su una scacchiera infinita nel modo seguente: lanciamo un dado; a seconda dell'esito spostiamo la pedina in una delle 4 celle adiacenti come in figura.



Quindi lanciamo di nuovo il dado e spostiamo la pedina di un altro passo, con la stessa regola e iteriamo il procedimento.

Più formalmente possiamo sostituire alla scacchiera l'insieme dei punti del piano a coordinate intere (n,m) con $n,m \in \mathbf{Z}$. Ora le caselle della scacchiera sono sostituite dai nodi del reticolo $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Si dice *passeggiata aleatoria nel piano* il processo descritto dal movimento di questa pedina in \mathbf{Z}^2 , e *passeggiata di n passi* quella corrispondente ad n lanci del dado. Si dice *cammino* la traiettoria seguita dalla pedina. Se immaginiamo di guardare la passeggiata aleatoria di una pedina per un gran numero di passi, e la guardiamo da lontano, la traiettoria avrà una forma casuale del tipo mostrato in figura.



Come si può notare la traiettoria tracciata ha una certa somiglianza con il moto browniano (continuo) di una particella. Per mantenere l'analogia, il numero n dei lanci del dado corrisponde al tempo trascorso dall'inizio del moto.

Descriviamo ora col linguaggio della probabilità la passeggiata aleatoria di n passi che parte da un punto x fissato del piano. Ci chiediamo quale sia lo spazio campionario. Lo spazio campionario è l'insieme dei cammini di n passi che partono da x . Il numero di questi cammini è 4^n e, cosa che vedremo in seguito, sono tutti equiprobabili.

Sia Ω_x^n lo spazio dei cammini di n passi che partono da x , e sia $A_{x,y}^n \in \Omega_x^n$ l'evento "la pedina è partita dal punto x e

dopo n passi si trova nel punto y ". Quanto vale $P(A_{x,y}^n)$? Non è facile contare il numero dei cammini possibili. Invece, definiamo la funzione *probabilità di transizione*

$$p(x, y, n) = P(A_{x,y}^n),$$

e cerchiamo di studiare le proprietà di questa funzione. Diamo innanzitutto la seguente definizione: dati due punti x,y nel reticolo piano degli interi, diciamo che x è vicino a y e scriviamo $x \sim y$ se $|x - y| = 1$. (E' il modulo di un vettore nel piano).

Si può dimostrare che:

- i) $p(x, y, n) = p(0, y - x, n)$ (invarianza per traslazione)

ii) Applicando il teorema delle probabilità totali si dimostra che:

$$p(x, y, n) = \frac{1}{4} \sum_{x'-x} p(x', y, n-1)$$

6. La passeggiata aleatoria di n passi come sequenza di prove indipendenti.

Possiamo ora formalizzare meglio la passeggiata aleatoria di n passi. Consideriamo una sequenza di n lanci di un dado a 4 facce, in dipendenza dal quale muoviamo la pedina di un passo in una delle 4 direzioni d_1, d_2, d_3, d_4 . Sia Ω_k lo spazio degli eventi elementari “incremento al k -esimo passo”, lo spazio dei cammini di n passi che partono da x , Ω_x^n si può quindi rappresentare come:

$$\Omega_x^n = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n.$$

Decidiamo di mettere in ogni Ω_k la probabilità uniforme ($1/4$ per ogni esito) e supponiamo inoltre che gli eventi $E_i = \{ \text{all}'i\text{-esimo passo l'incremento è stato } d_{k_i} \}$, per $i=1,2,\dots,n$.

Siano una famiglia di eventi indipendenti, per ogni scelta dei d_{k_i} . Questo determina la probabilità in Ω : infatti, la probabilità di una qualsiasi particolare traiettoria di n passi, ad esempio: $(d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_n})$ sarà:

$$P(\text{al } 1^\circ \text{ passo l'incremento è } d_{k_1}) \cdot P(\text{al } 2^\circ \text{ passo l'incremento è } d_{k_2}) \cdot \dots \cdot P(\text{al } n\text{-esimo passo l'incremento è } d_{k_n}) = \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^n}.$$

Otteniamo pertanto, per via rigorosa, il fatto che i cammini sono tutti equiprobabili, come conseguenza delle due ipotesi: 1) ad ogni passo i 4 esiti sono equiprobabili; 2) gli esiti a passi successivi sono indipendenti.

7. Variabili aleatorie legate alla passeggiata aleatoria.

Consideriamo ora la passeggiata aleatoria di n passi di una pedina che parte dal punto $(0,0)$ di un riferimento cartesiano ortogonale. Sia \underline{R}_n il vettore che rappresenta la posizione della pedina al passo n , avente come componenti (X_n, Y_n) :

$$\underline{R}_n = (X_n, Y_n)$$

Chiamiamo Ω_0^n l'insieme di tutti i possibili cammini di n passi che partono da $(0,0)$.

Il numero di eventi elementari, tutti equiprobabili, che fanno parte di Ω_0^n è 4^n , in quanto per ogni passo la pedina può muoversi in 4 direzioni possibili. Nel nostro caso:

$$\Omega_0^n = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{4^n} \}$$

Quindi :

$$X_n : \Omega_0^n \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$Y_n : \Omega_0^n \rightarrow \mathfrak{R}$$

Possiamo definire il vettore incremento di posizione della pedina al passo n -esimo come

$$\Delta \underline{R}_n = (\Delta X_n, \Delta Y_n).$$

Definiamo inoltre $S_n = |\underline{R}_n|$ = distanza della pedina dall'origine al passo n .

Formalmente sono tutte variabili aleatorie definite su Ω_0^n . Notiamo inoltre che:

$X_n, Y_n, \Delta X_n, \Delta Y_n, S_n$ sono variabili aleatorie; $\underline{R}_n, (\Delta \underline{R})_n$ sono vettori aleatori.

Inoltre $(\Delta X_n, \Delta Y_n)$ non sono indipendenti; (X_n, Y_n) non sono indipendenti; \underline{R}_n e $(\Delta \underline{R})_{n+1}$ sono indipendenti per l'indipendenza dei lanci del dado.

Vale la seguente relazione:

$$\underline{R}_n = (\Delta \underline{R})_1 + (\Delta \underline{R})_2 + \dots + (\Delta \underline{R})_n = \sum_{k=1}^n (\Delta \underline{R})_k$$

8. Il valore atteso delle variabili legate alla passeggiata aleatoria

Ricordiamo che: dato un vettore aleatorio $\underline{R} = (X, Y)$ poniamo $E\underline{R} = (EX, EY)$

Estendiamo ora ai vettori aleatori le proprietà del valore atteso di variabili aleatorie. Dalla definizione abbiamo:

$$E(\Delta X_n) = E(\Delta Y_n) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

quindi:

$$E\underline{R}_n = E\left(\sum_{i=1}^n (\Delta \underline{R})_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\Delta \underline{R})_i = \sum_{i=1}^n (0,0) = (0,0)$$

La posizione attesa della pedina dopo n passi è l'origine. Più interessante è invece il seguente

Teorema: detto S_n la distanza della pedina dall'origine al passo n ($S_n = |\underline{R}_n|$), il valore atteso di S_n^2 ("cammino quadratico medio in n passi") è:

$$E(S_n^2) = n$$

Dimostrazione.

Indicando con il simbolo "·" il prodotto scalare tra due vettori:

$$S_n^2 = |\underline{R}_n|^2 = \underline{R}_n \cdot \underline{R}_n = [\underline{R}_{n-1} + (\Delta \underline{R})_n] \cdot [\underline{R}_{n-1} + (\Delta \underline{R})_n] = |\underline{R}_{n-1}|^2 + 2 \underline{R}_{n-1} \cdot (\Delta \underline{R})_n + |(\Delta \underline{R})_n|^2$$

$$|\underline{R}_{n-1}|^2 = S_{n-1}^2$$

$$|(\Delta \underline{R})_n|^2 = 1$$

per la linearità del valore atteso:

$$E S_n^2 = E (S_{n-1}^2) + 2E(\underline{R}_{n-1} (\underline{\Delta R})_n) + 1$$

Ma dal momento che $(\underline{\Delta R})_n$ e \underline{R}_{n-1} sono indipendenti, per la proprietà del prodotto scalare di due vettori aleatori indipendenti enunciata al paragrafo 4 possiamo scrivere:

$$E(\underline{R}_{n-1} (\underline{\Delta R})_n) = (E \underline{R}_{n-1})(E(\underline{\Delta R})_n) = (0,0) (0,0) = 0$$

da cui:

$$E S_n^2 = E (S_{n-1}^2) + 1$$

Essendo per

$n = 1, S_1^2 = 1, E S_1^2 = 1$ avremo:

$$E S_n^2 = n$$

Osservazioni.

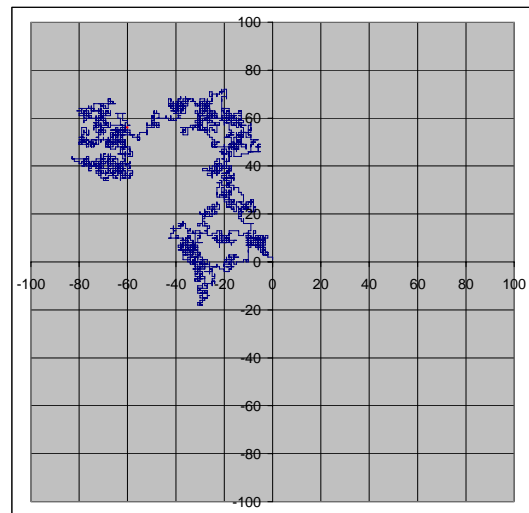
Notiamo che $E(S_n^2)$ è lo spostamento quadratico medio della pedina in n passi o, se vogliamo, in un “tempo” n . Perciò la relazione espressa dall’ultimo teorema è l’equivalente, nel caso discreto, della relazione fondamentale di Einstein sul moto browniano dove la costante $\frac{1}{2}D$ vale 1. Questo fatto

conferma che la passeggiata aleatoria nel piano è una rappresentazione ragionevole, nel discreto, del moto browniano. Perciò proseguiremo nello studio di questo modello.

Per illustrare meglio il significato probabilistico di questo teorema si può simulare al computer la passeggiata aleatoria di n passi e, ripetendo molte volte la simulazione, calcolare il valor medio degli spostamenti quadratici: dovremmo trovare come risultato approssimativamente il valore n .

9. Descrizione della simulazione e dei risultati ottenuti.

Dal momento che la passeggiata aleatoria può essere considerata un modello del moto browniano abbiamo provato a simularla con un programma di EXCEL volendo verificare dal punto di vista probabilistico se lo spostamento quadratico medio in n passi fosse effettivamente pari a n . Abbiamo sfruttato il generatore di numeri casuali di Excel, che restituisce un valore c compreso tra 0 e 1, per simulare il lancio del dado. I vettori $\Delta X, \Delta Y$ prendono i seguenti valori in base al numero casuale uscito:



Numero casuale	ΔX	ΔY
$0 \leq c < 0.25$	+1	0
$0.25 \leq c < 0.50$	-1	0
$0.50 \leq c < 0.75$	0	+1
$0.75 \leq c \leq 1$	0	-1

X e Y assumono come valore la somma rispettivamente di tutti i ΔX e di tutti i ΔY . Questo programma permette di calcolare il cammino percorso da una pedina in un numero definito di passi e di calcolare il valore dello spostamento quadratico calcolato come X^2+Y^2 . Abbiamo poi applicato al programma una macro (una routine di Microsoft Visual Basic all'interno del foglio di calcolo) che compisse un numero definito di passeggiate aleatorie, ne raccogliesse gli spostamenti quadratici e restituisse lo spostamento quadratico medio. Facendo fare alla macro un numero sufficientemente grande di prove il rapporto fra lo spostamento quadratico medio ed il numero di passi si discosta dal valore 1 per meno del 2% confermando la soluzione raggiunta tramite il calcolo delle probabilità. Il programma per ogni passeggiata aleatoria simula 9000 passi. Ecco alcuni dei valori del rapporto tra lo spostamento quadratico medio della pedina dopo n passi ed il valore n , calcolato per $n=9000$ ed un numero di prove variabile.

<i>Numero prove</i>	S_n^2 ($n=9000$)	S_n^2/n ($n=9000$)
100	9476.36	1.053
500	8817.508	0.98
1000	8819.854	0.98
5000	9240.982	1.027

10. Passeggiata aleatoria in un dominio e istante di prima uscita

Fino ad ora abbiamo sempre osservato la passeggiata aleatoria fissando un numero di passi n e cercando di prevedere la posizione della pedina al passo n -esimo. Ora cambiamo approccio: fissiamo un certo insieme nel piano, per esempio la striscia $\{|x| \leq k\}$ con k reale positivo, lasciamo scorrere il tempo e chiediamoci dopo quanti passi la pedina uscirà dalla striscia. Per prima cosa dobbiamo chiederci se la pedina uscirà. Il concetto è intuitivo e sembra scontato, ma richiede una dimostrazione matematica rigorosa.

Per provarlo si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema. *I valori che X_n può assumere sono: $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, e questi vengono assunti con le seguenti probabilità:*

$$P(X_n = k) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n+k} \text{ per } k=0, 1, \dots, n;$$

$$P(X_n = -k) = P(X_n = k)$$

$$\text{dove } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si può allora dimostrare anche il seguente teorema:

Teorema.

Fissato k_0 (grande quanto si vuole) e $\varepsilon > 0$ (piccolo quanto si vuole) $\exists n_0$ t.c. per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$P(|X_n| \leq k_0) < \varepsilon$$

Questo teorema discende dalla legge che regola la variabile aleatoria X_n . Esso ci garantisce che esiste sempre un numero di passi abbastanza grande tale che la pedina rimanga all'interno della striscia con probabilità minore di qualsiasi ε , ovvero la pedina ha probabilità tendente a zero di rimanere all'interno della striscia.

Questa premessa è fondamentale per quanto verrà in seguito, perché garantirà l'esistenza delle variabili che andremo a considerare. Possiamo pertanto definire la seguente variabile aleatoria:

$$N = \min\{n : |X_n| = k_o\} \quad \text{per } k_o \in \mathbf{N} \text{ fissato.}$$

N è l'istante di prima uscita della pedina dalla striscia $|x| \leq k_o$. Potremmo anche dire che è il primo passo in cui la pedina raggiunge il bordo della striscia. Per quanto dimostrato, con probabilità 1 la variabile aleatoria N assume un valore finito; perciò l'evento "la pedina resta per sempre nella striscia" ha probabilità nulla, il che, si badi, non significa che l'evento è impossibile.

N inoltre può assumere qualsiasi valore naturale, cioè assume un numero infinito di valori. E' un oggetto più complesso delle variabili aleatorie sin qui considerate. In quale spazio è definito N ? non è definito sullo spazio considerato finora Ω_o^n delle traiettorie di n passi che partono dall'origine, ma sullo spazio Ω_o di tutte le traiettorie che partono dall'origine e si estendono per un tempo indefinito. Il problema è che in questo spazio infinito non è facile definire P . Il salto logico fatto è perciò importante: dalle variabili aleatorie finite a quelle, più generalmente, discrete ma infinite. Vedremo che sarà possibile, anche senza definire rigorosamente la probabilità su Ω_o , ragionare correttamente sulle probabilità legate alla variabile aleatoria N nei casi che ci interessano.

11. Istante di prima uscita da un dominio limitato. Il gioco delle scommesse sul punto di prima uscita.

Estendiamo ora il discorso fatto per la striscia $\{|x| \leq k\}$ ad un insieme del piano più generale. Sia ora $\Omega \subset Z^2$ un *dominio limitato*, ossia contenuto in un cerchio $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ per qualche R . Sia x un qualunque punto di Ω , fissato. Consideriamo la passeggiata aleatoria che parte da x e chiamiamo R_n^x la posizione al passo n -esimo. Ci chiediamo: "qualunque punto di Ω può essere raggiunto dalla pedina?" Dipende da come è fatto Ω .

Def. Sia $\Omega \subset Z^2$. Si dice che Ω è connesso se per ogni coppia di punti P_1 e $P_2 \in \Omega$, esiste un cammino che collega P_1 e P_2 tutto contenuto in Ω .

Per l'insieme Ω dovranno valere le seguenti proprietà:

- Ω deve essere connesso, altrimenti alcuni punti non si possono raggiungere partendo da x .
- Ω deve essere limitato. Ciò significa che deve essere possibile disegnare un cerchio a cui appartenga ogni punto di Ω . In particolare, Ω sarà anche contenuto in una striscia.

Se Ω è contenuto in una striscia, prima o poi, con probabilità 1, la pedina uscirà dalla striscia.

Per definire con precisione la variabile aleatoria N_Ω^x "istante di prima uscita da Ω per la passeggiata che parte da x " occorre definire cosa si intende con "bordo" di Ω .

Def. Sia Ω un dominio connesso e limitato; P è *punto interno* di Ω se $P \in \Omega$ e ciascuno dei suoi quattro vicini appartiene anch'esso a Ω .

Si dice *interno di* Ω e si indica con Ω° l'insieme dei punti interni di Ω .

Si dice che P è un punto di frontiera di Ω se $P \in \Omega$ ma $P \notin \Omega^\circ$. Si dice *frontiera o bordo di Ω* , e si indica con $\partial\Omega$ l'insieme dei punti di frontiera per Ω .

Ora possiamo definire rigorosamente la variabile aleatoria "istante di prima uscita da Ω per la passeggiata aleatoria che parte da x " come

$$N_\Omega^x = \min\{n : R_n^x \in \partial\Omega\}$$

Questo ha senso $\forall x \in \Omega$ (se Ω è limitato); se in particolare $x \in \partial\Omega$, $N_\Omega^x = 0$ certamente. E' quindi significativo considerare N_Ω^x per $x \in \Omega^\circ$. Consideriamo ora il punto, $\underline{R}_{N_\Omega^x}^x$, aleatorio che rappresenta la *posizione della pedina che è partita da x , nell'istante in cui raggiunge il bordo di Ω* , ossia il "punto di prima uscita da Ω per la passeggiata aleatoria partita da x ".

Supponiamo di voler fare delle "scommesse" su quale sarà questo punto di uscita. Dobbiamo però in tal caso restringere la nostra attenzione ai casi non banali in cui i punti abbiano la possibilità di essere "punti di prima uscita". Per questa ragione si rende necessaria una precisazione.

Diamo la seguente **definizione**: si definisce *frontiera ridotta* l'insieme dei punti di frontiera che hanno tra i quattro vicini almeno un punto interno di Ω . Indichiamo con $\partial'\Omega$ l'insieme dei punti della frontiera ridotta di Ω e consideriamo un dominio Ω tale per cui la sua frontiera coincida con la frontiera ridotta.

Def. Un dominio $\Omega \subset Z^2$, si dice *ammissibile* se è limitato, connesso, ha interno non vuoto e la sua frontiera coincide con la frontiera ridotta.

Infatti, i punti del bordo non appartenenti alla frontiera ridotta non possono essere di prima uscita, perché per arrivare ad essi la pedina deve necessariamente transitare prima per i punti della frontiera ridotta arrivando da un punto interno.

L'interno di Ω (ovvero l'insieme di tutti i punti interni) non deve essere vuoto, altrimenti la pedina parte già da un punto di uscita.

Consideriamo il punto $\underline{R}_{N_\Omega^x}^x$ che rappresenta il punto di prima uscita. Supponiamo di definire una funzione $f(z)$ con $z \in \partial\Omega$ sui punti che appartengono al bordo di Ω .

Vogliamo realizzare una sorta di gioco matematico, simile a quello tipico delle fiere di paese in cui si libera un coniglio all'interno di un recinto con molte uscite; si scommette su quale uscita prenderà il coniglio. Allo stesso modo noi scommetteremo sul punto di prima uscita della pedina; ad ogni punto sarà associata una vincita data dalla funzione $f(z)$ con $z \in \partial\Omega$.

Ci chiediamo quale sia il prezzo equo da pagare per partecipare a questo gioco. Questo coinciderà con il valore atteso di una variabile aleatoria che rappresenta la vincita, cioè $f(z)$. Notiamo che $f(z)$ non è una variabile aleatoria, bensì una funzione deterministica. La vincita effettiva è il valore di questa funzione calcolato nel punto di prima uscita, cioè:

$$f(\underline{R}_{N_\Omega^x}^x)$$

Anche se f è una funzione deterministica (il suo valore è noto in ogni punto di $\partial\Omega$), la vincita è aleatoria perché è aleatorio il punto di prima uscita della pedina: $\underline{R}_{N_\Omega^x}^x$.

Riassumendo, stiamo considerando per una passeggiata aleatoria che parte da x :

- l'istante (aleatorio) di prima uscita da Ω , indicato con il simbolo N_Ω^x ;
- il punto (aleatorio) di prima uscita da Ω , indicato con il simbolo $\underline{R}_{N_\Omega^x}^x$;

- la vincita corrispondente, $f(\underline{R}_{N_\Omega}^x)$.

Ci chiediamo ora quale sia il prezzo equo da pagare o, in altri termini, quale sia la vincita attesa. Questa dipende ovviamente dal punto di partenza x ed è il valore atteso di questa variabile:

$$E[f(\underline{R}_{N_\Omega}^x)]$$

Al variare del punto di partenza x questo valore atteso assumerà valori diversi; dunque il valore atteso è anch'esso funzione del punto di partenza ma non è una variabile aleatoria. Definiamo dunque la funzione $u(x)$ come

$$u(x) = E[f(\underline{R}_{N_\Omega}^x)]$$

Si noti che $u(x)$ è una funzione deterministica e non probabilistica, poiché ha per argomento un punto.

Questa funzione soddisfa due fondamentali proprietà che costituiscono i seguenti importanti teoremi.

Teorema 1.

Per ogni $z \in \partial\Omega$ $u(z) = f(z)$.

Dimostrazione.

La dimostrazione è immediata: se la pedina parte da un punto appartenente al bordo, chiaramente il punto di partenza è già di prima uscita e dunque la vincita che si ha è quella associata al punto di partenza z .

Teorema 2.

Per ogni $x \in \Omega^0$ si ha che $u(x) = \frac{1}{4} \sum_{x' \sim x} u(x')$. Ovvero per ogni x essa è la media del valore

assunto nei quattro punti vicini, come dimostreremo ora.

Determinare $u(x)$ perciò, significa dunque risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \forall z \in \partial\Omega & u(z) = f(z) \\ \forall x \in \Omega^0 & u(x) = \frac{1}{4} \sum_{x' \sim x} u(x') \end{cases}$$

Dimostrazione.

Calcoliamo $u(x)$. Notiamo che:

$$u(x) = E[f(X)] \text{ dove } X = \underline{R}_{N_\Omega}^x.$$

Usiamo allora la formula che esprime il valore atteso di una variabile aleatoria:

$$E[f(X)] = \sum_k f(x_k) p_X(x_k).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{z \in \partial\Omega} f(z) P(\underline{R}_{N_\Omega}^x = z) = \sum_{z \in \partial\Omega} f(z) \sum_{x' \sim x} P(\underline{R}_{N_\Omega}^x = z | \underline{R}_1^x = x') P(\underline{R}_1^x = x') = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{x' \sim x} \sum_{z \in \partial\Omega} f(z) P(\underline{R}_{N_\Omega}^x = z | \underline{R}_1^x = x') = \frac{1}{4} \sum_{x' \sim x} \sum_{z \in \partial\Omega} f(z) P(\underline{R}_{N_\Omega}^{x'} = z) = \frac{1}{4} \sum_{x' \sim x} u(x') \end{aligned}$$

L'aspetto interessante, che mostreremo in seguito, è che le proprietà di $u(x)$ espresse dai suddetti teoremi determinano univocamente u . Pertanto avremo un modo di determinare u che non fa riferimento al suo significato probabilistico.

12. Laplaciano discreto

Se u è una funzione definita in Ω , definiamo:

$$\Delta u(x) = \left[\frac{1}{4} \sum_{x' \sim x} u(x') \right] - u(x) \text{ per } x \in \Omega^0$$

L'operatore Δ si definisce laplaciano discreto di una funzione ed associa ad u la media sui suoi punti vicini diminuita della funzione stessa.

Dunque per il teorema dimostrato in §11 la funzione $u(x) = E[f(\underline{R}_{N_\Omega}^x)]$ soddisfa il seguente sistema:

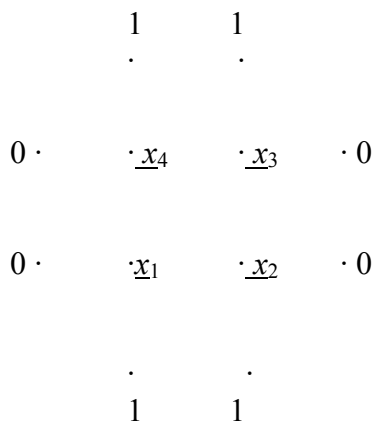
$$\begin{cases} \forall z \in \partial\Omega & u(z) = f(z) \\ \forall x \in \Omega^0 & \Delta u(x) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema, con Ω e f assegnati e u incognita, prende il nome di problema di Dirichlet su Ω per il laplaciano discreto, con dato al bordo f .

Risolvere il problema di Dirichlet significa risolvere un sistema lineare di k equazioni in k incognite, dove k è il numero dei punti interni di Ω .

A titolo di esempio possiamo infatti considerare il dominio rappresentato in figura 11.1 nella quale sono anche indicati i valori assunti dalla funzione sui punti del bordo del dominio (z_i). Scrivendo esplicitamente il sistema sopra citato nel nostro caso particolare otteniamo:

$$\begin{cases} u(x_1) = \frac{1}{4}(1 + 0 + u(x_2) + u(x_3)) \\ u(x_2) = \frac{1}{4}(u(x_1) + 1 + 0 + u(x_4)) \\ u(x_3) = \frac{1}{4}(u(x_1) + u(x_4) + 1 + 0) \\ u(x_4) = \frac{1}{4}(u(x_3) + u(x_2) + 0 + 1) \end{cases}$$



Come si vede si scrivono tante equazioni quante sono i punti interni del dominio e le incognite sono rappresentate dai valori assunti dalla funzione u in corrispondenza ad ognuno dei punti interni del dominio stesso.

Così il calcolo del valore atteso della vincita è stato ricondotto ad un calcolo puramente algebrico, che non ha nulla a che fare con il calcolo delle probabilità. Occorre dimostrare che questo problema ha una e una sola soluzione per ogni valore di x .

Per far questo introduciamo il seguente teorema, detto principio di massimo:

Teorema Se Ω è un dominio ammissibile la soluzione u del problema di Dirichlet (ammesso che esista) assume i valori massimo e minimo sul bordo di Ω .

Dimostrazione.

Per assurdo immaginiamo che $u(x)$ assuma il suo valore massimo in $x_0 \in \Omega^\circ$. Dal problema di Dirichlet ricaviamo che $\Delta u(x_0) = 0$, per tanto:

$$u(x_0) = \left[\frac{1}{4} \sum_{x' \sim x_0} u(x') \right]$$

Inoltre $\forall x' \in \Omega$ si verifica $u(x') \leq u(x_0)$, poiché in $u(x_0)$ abbiamo il valore massimo. La media di 4 numeri minori o uguali a $u(x_0)$ può essere uguale a $u(x_0)$ solamente se i 4 numeri sono uguali a $u(x_0)$. Possiamo quindi dire che $\forall x' \sim x_0, u(x') = u(x_0)$. Essendo Ω connesso, possiamo connettere un qualsiasi punto $y \in \Omega$ a x_0 . Ripetendo il discorso precedente troviamo che

$\forall y \in \Omega \quad u(y) = u(x_0)$. Ne deriva che se u assume il massimo in un punto interno a Ω , u è costante in tutti i suoi punti, in particolare assume il massimo sul bordo.

Analogamente si dimostra che il valore minimo viene assunto sul bordo.

Da questo discende il seguente teorema.

Teorema Il problema di Dirichlet ha al più una soluzione per ogni dato al bordo assegnato.

Dimostrazione.

Per assurdo consideriamo u' e u'' due soluzioni del problema di Dirichlet corrispondenti al medesimo dato al bordo f . In questa condizione $u' - u''$ soddisfa un problema analogo con dato al bordo $f - f$, cioè dato al bordo nullo. Ne deriva che $u' - u''$ sul bordo è identicamente nulla, e poiché soddisfa il principio di massimo è nulla anche in Ω , ossia $u' \equiv u''$

Per la teoria dei sistemi lineari di k equazioni in k incognite, l'unicità della soluzione garantisce anche l'esistenza della stessa. Dunque si può andare a risolvere il sistema, come garantisce il seguente

Teorema Se Ω è un dominio ammissibile, assegnato il dato al bordo f , il problema di Dirichlet ammette una e una sola soluzione $u(x)$. Tale soluzione inoltre assume massimo e minimo sul bordo di Ω .

Supponiamo che la soluzione del sistema interessi solo per un punto o per pochi punti del dominio. In questo caso, per risolvere il sistema adotteremo un approccio probabilistico. Simuleremo un grande numero di passeggiate aleatorie che partono dal punto di cui ci interessa determinare la funzione u , e per ognuna di esse calcoleremo la vincita. La media delle vincite sarà una soluzione approssimata del problema di Dirichlet per quel punto. Purtroppo, per lo stesso carattere probabilistico dell'approssimazione, non è possibile stimarne a priori l'errore. Per effettuare queste simulazioni è possibile sfruttare lo stesso software informatico descritto nel paragrafo 9.

Tentare invece di risolvere il sistema con gli strumenti dell'algebra lineare risulta gravoso, in quanto il sistema presenta un numero di equazioni pari al numero dei punti interni del dominio. Anche se, come nel caso sopraddetto, la soluzione interessasse solo per pochi punti, la quantità di calcoli sarebbe solo di poco ridotta.

13. Laplaciano continuo

Il laplaciano continuo è un operatore differenziale, cioè ha a che fare con il concetto di derivata di una funzione. Pertanto opera nel continuo. L'aggettivo continuo al termine *laplaciano* è stato aggiunto in questo lavoro per distinguerlo dal laplaciano discreto che abbiamo introdotto come "approssimazione" del laplaciano continuo. Normalmente l'operatore viene indicato semplicemente come laplaciano.

Il laplaciano interviene nella soluzione di parecchi problemi fisici, che richiameremo in seguito. Per comprendere la definizione del laplaciano è necessario introdurre il concetto di derivata; procederemo definendo le derivate prime e seconde approssimate poiché non possediamo ancora i contenuti di calcolo infinitesimale necessari a comprendere il concetto di derivata.

- **Derivate prima e seconda approssimate**

Supponiamo di avere un punto che si muova su una retta. Lo spazio che esso percorre è funzione del tempo e possiamo scrivere in simboli:

$$s = f(t)$$

Immaginiamo di voler calcolare la velocità media v_m del punto materiale nell'intervallo di tempo $[t_1; t_2]$. Chiaramente essa sarà:

$$v_m = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Se volessimo calcolare la velocità istantanea del punto in un istante t , dovremmo calcolare la velocità media su un intervallo di tempo molto piccolo, tendente a zero, centrato in t . Consideriamo ad esempio l'intervallo centrato in t di durata h ; la velocità istantanea v_h approssimata sarà:

$$v_h(t) = \frac{f(t + \frac{h}{2}) - f(t - \frac{h}{2})}{h}$$

E' chiaro che l'approssimazione è tanto migliore quanto più h è piccolo. Si può immaginare che quanto più h tenda a zero, tanto più v_h tende alla velocità istantanea del punto nell'istante t .

Potremmo ora voler calcolare anche l'accelerazione media a_h del punto. Consideriamo sempre l'intervallo di tempo $\left[t - \frac{h}{2}; t + \frac{h}{2} \right]$:

$$a_h = \frac{v_h\left(t + \frac{h}{2}\right) - v_h\left(t - \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - \frac{f(t) - f(t-h)}{h}}{h} = \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2}$$

Anche in questo caso l'approssimazione è tanto migliore quanto più h è piccolo.

Queste due funzioni v_h e a_h che abbiamo definito a partire dalla funzione f che esprime lo spazio percorso in funzione del tempo impiegato, possono essere estese a qualsiasi funzione reale a variabile reale; esse prenderanno il nome rispettivamente di derivata prima e di derivata seconda approssimate per la funzione f . Si ha dunque:

Definizione 1 Per una qualsiasi funzione $y = f(x)$ con $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e un numero $h > 0$ fissato, chiameremo derivata prima approssimata della f e la indicheremo $f'_h(x)$ la seguente espressione:

$$f'_h(x) = \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

Definizione 2 Per una qualsiasi funzione $y = f(x)$ con $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e un numero $h > 0$ fissato, chiameremo derivata seconda approssimata della f e la indicheremo $f''_h(x)$ la seguente espressione:

$$f''_h(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

Consideriamo ora, a titolo di esempio, alcuni casi nei quali è nota la legge oraria per mostrare che applicando la formula della derivata prima e seconda approssimate si ottengono rispettivamente la velocità e l'accelerazione previste nel tipo di moto preso in esame.

Il moto uniformemente accelerato.

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato partendo da fermo e percorrendo, con accelerazione a costante, uno spazio s nel tempo t . La sua legge oraria è la seguente:

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2$$

Calcoliamo la derivata prima approssimata:

$$v_h(t) = s'_h(t) = \frac{\frac{1}{2} a \left[\left(t + \frac{h}{2} \right)^2 - \left(t - \frac{h}{2} \right)^2 \right]}{h} = \frac{1}{2} a \frac{2ht}{h} = at$$

Come si vede, il risultato ottenuto è indipendente da h e coincide con la velocità prevista dalle leggi del moto uniformemente accelerato. Supponiamo ora di voler calcolare la derivata seconda di s , ovvero l'accelerazione subita dal corpo. Ci aspettiamo naturalmente che essa sia a :

$$a_h(t) = s''_h(t) = \frac{\frac{1}{2} a \left[(t+h)^2 + (t-h)^2 - 2t^2 \right]}{h^2} = \frac{1}{2} a \frac{2h^2}{h^2} = a$$

Abbiamo ottenuto il risultato previsto.

Il moto armonico.

Supponiamo ora di voler calcolare le derivate della legge oraria per un punto materiale che si muove di moto armonico descrivendo uno spostamento s nel tempo t secondo la ben nota legge oraria del moto armonico:

$$s(t) = \sin(\omega t)$$

La derivata prima approssimata sarà:

$$v_h(t) = \frac{\sin\left[\omega\left(t + \frac{h}{2}\right)\right] - \sin\left[\omega\left(t - \frac{h}{2}\right)\right]}{h} = \frac{2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega h}{2}\right)}{h}$$

Per angoli molto piccoli, si può assumere che il valore del seno dell'angolo coincida con la misura in radianti dell'angolo stesso e, pertanto

$$v_h(t) \cong \frac{2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \left(\frac{\omega h}{2}\right)}{h} = \omega \cos(\omega t).$$

Per quanto riguarda la derivata seconda approssimata, si ha:

$$\begin{aligned} a_h(t) &= \frac{\sin[\omega(t+h)] + \sin[\omega(t-h)] - 2\sin(\omega t)}{h^2} = -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{2(1 - \cos(\omega h))}{\omega^2 h^2} \right] = \\ &= -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{2(1 - \cos(\omega h))}{\omega^2 h^2} \cdot \frac{(1 + \cos(\omega h))}{(1 + \cos(\omega h))} \right] = -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{2(1 - \cos^2(\omega h))}{\omega^2 h^2 \cdot (1 + \cos(\omega h))} \right] = \\ &= -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{2(\sin^2(\omega h))}{\omega^2 h^2 \cdot (1 + \cos(\omega h))} \right] \end{aligned}$$

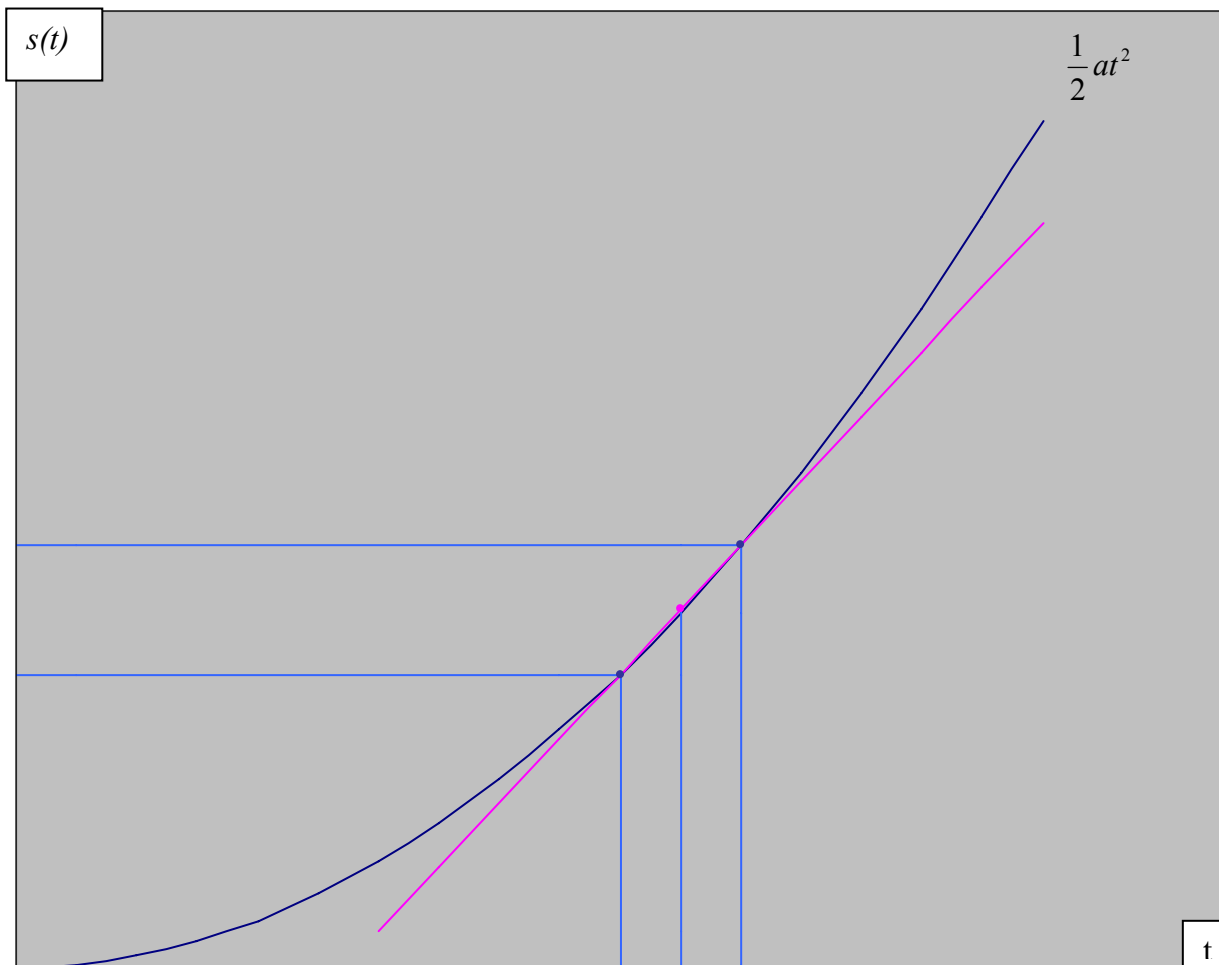
Per h molto piccolo, l'argomento della parentesi quadra tende a 1 poiché, per angoli molto piccoli, il seno di un angolo è circa uguale al suo argomento; dunque otteniamo $a(t) = -\omega^2 \sin(\omega t)$ che è il risultato atteso.

Le derivate hanno un significato geometrico relativo al grafico di una funzione nel piano cartesiano. In particolare la derivata prima approssimata rappresenta, con buona approssimazione se h è sufficientemente piccolo, il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto in cui essa viene calcolata.

Si consideri ancora una volta a titolo di esempio il caso del moto uniformemente accelerato.

Il grafico seguente rappresenta la legge oraria di un corpo che si muove lungo una retta di moto uniformemente accelerato. Come si può vedere, la retta secante passante per i due punti della curva

di ascissa $\left(t_o - \frac{h}{2}\right)$ e $\left(t_o + \frac{h}{2}\right)$ tende a diventare tangente alla curva nel suo punto di ascissa t_o quanto più h tende a zero.



La derivata seconda invece ha a che fare con la “curvatura” del grafico. Per la retta essa assume sempre valore nullo; quanto più è grande il valore assoluto di f''_h tanto maggiore è la curvatura. Il segno è invece legato al verso della curvatura: se la derivata seconda in un punto è positiva la curva volge la concavità verso l’alto, se è negativa il grafico volge la concavità verso il basso.

- **Funzioni a due variabili**

Le derivate risultano molto utili anche nello studio delle funzioni a due variabili. Come le funzioni ad una variabile hanno per grafico una linea nel piano cartesiano, così quelle a due variabili hanno per grafico una superficie nello spazio. Per studiare la curvatura del grafico di una funzione a due variabili si può intersecare il suo grafico con piani paralleli agli assi x o y e studiare la derivata seconda delle curve intersezione.

Questo equivale a calcolare la derivata seconda della funzione nella quale una delle due variabili viene fissata.

Definizione. Si supponga di considerare una funzione $z = f(x, y)$ $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ e un numero $h > 0$.

Si definisce derivata seconda approssimata di f rispetto a x (che indicheremo con il simbolo: $(D_x^2 f)_h(x, y)$) la seguente espressione:

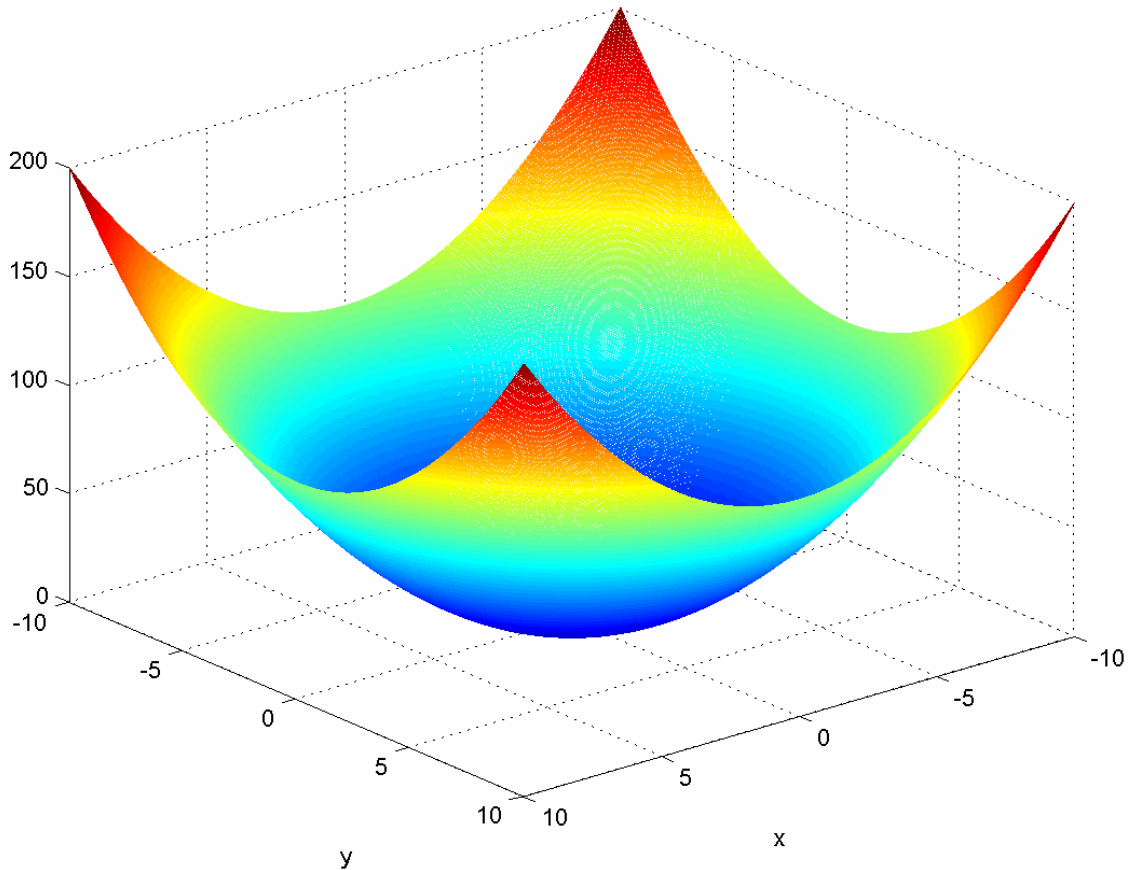
$$(D_x^2 f)_h(x, y) = \frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)}{h^2}$$

E si definisce derivata seconda approssimata di f rispetto a y la seguente quantità:

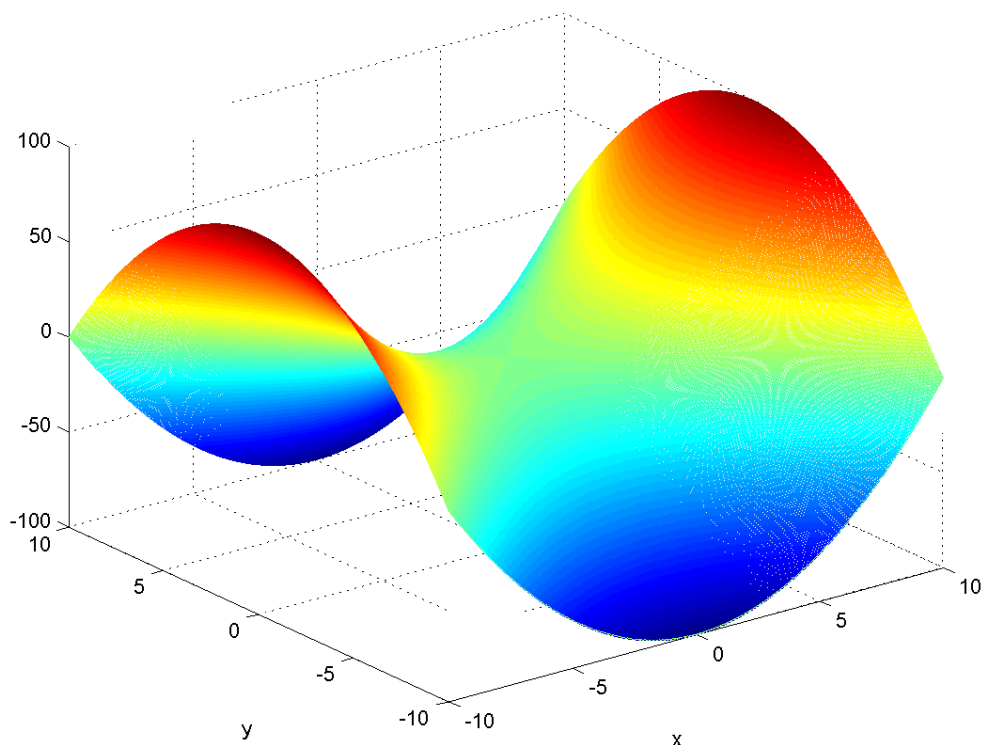
$$(D_y^2 f)_h(x, y) = \frac{f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)}{h^2}$$

Studiare queste due derivate significa considerare la curvatura delle linee che sono intersezione tra la superficie che nello spazio rappresenta il grafico della funzione $f(x, y)$ e un opportuno piano che intersechi la superficie stessa.

Ad esempio il paraboloido di equazione $z=x^2+y^2$, che ha il grafico rappresentato in figura seguente, ha derivate seconde dello stesso segno nelle direzioni parallele all'asse x e all'asse y , perché presenta una curvatura nello stesso verso (ossia verso l'alto) in entrambe le direzioni:



Invece il grafico di equazione $z=x^2-y^2$ presenta derivate seconde discordi nelle due direzioni. Come si vede da grafico seguente, infatti, la curvatura di una sezione parallela all'asse delle x è verso l'alto mentre se consideriamo una sezione lungo una parallela all'asse delle y la curvatura è verso il basso :



In molte questioni risulta significativa la somma delle due derivate seconde nello stesso punto; è utile dunque definire un nuovo operatore, che chiameremo laplaciano approssimato ed indicheremo $\Delta_h f(x, y)$. Per quanto detto:

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x, y) &= \\ (D_y^2 f)_h + (D_x^2 f)_h &= \frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)}{h^2} + \frac{f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)}{h^2} = \\ &= \frac{4}{h^2} \left[\frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h)}{4} - f(x, y) \right] = \\ &= \frac{4}{h^2} [M_h f(x, y) - f(x, y)] \end{aligned}$$

Abbiamo indicato con $M_h f(x, y)$ la media della funzione nei quattro punti “vicini” al punto (x, y) , ossia a distanza h da (x, y) lungo rette parallele agli assi cartesiani.

Da qui la seguente

Definizione. Data una funzione $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo laplaciano approssimato di f la seguente quantità:

$$\Delta_h f(x, y) = \frac{4}{h^2} [M_h f(x, y) - f(x, y)]$$

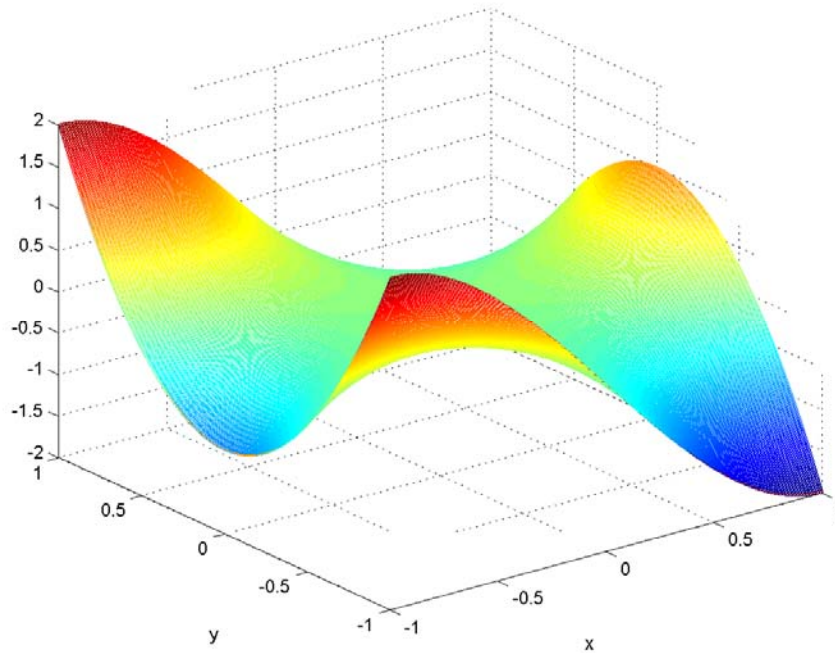
Si noti la somiglianza tra la forma del laplaciano approssimato e di quello discreto.

Anche qui, quanto più piccolo sarà h tanto più il laplaciano approssimato si avvicinerà ad una quantità che non dipende da h , che possiamo chiamare laplaciano continuo di f , che si indica con $\Delta f(x, y)$.

Una funzione si dice armonica in un dato dominio se $\Delta f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)$ appartenenti a quel dominio.

Ad esempio il paraboloido di cui abbiamo riportato sopra il grafico non è armonico, perché presenta derivate seconde rispetto alle due variabili che, in ogni punto, hanno segno concorde. Il laplaciano non potrà quindi essere nullo.

Diverso è invece il caso della “sella” (la funzione di equazione $z = x^2 - y^2$) e della funzione di equazione $z = x^3 - 3xy^2$ (rappresentata nel grafico seguente). In entrambi i casi le derivate seconde rispetto alle due variabili sono opposte per ogni punto del dominio.



Si osserva che, all'interno del quadrato considerato, non ci sono punti di massimo o minimo, che si troveranno sul bordo. Questo vale per tutte le funzioni armoniche cioè per quelle funzioni che soddisfano il cosiddetto problema di Dirichlet su un certo dominio.

Come anticipato, riportiamo di seguito alcuni esempi fisici in cui il problema di Dirichlet ben descrive l'evoluzione di alcune grandezze associate alla descrizione di particolari fenomeni.

1. **Equilibrio di una membrana elastica.** Consideriamo una membrana elastica omogenea, fissata sul suo bordo ad un filo metallico, e supponiamo che questa sia ferma (cioè non stia vibrando, ma sia disposta nella sua forma “a riposo”). Sia Ω l'insieme di punti del piano che si vede guardando dall'alto la membrana; la forma della membrana (che, se il filo metallico è un po' ondulato, *non sarà* piana!) è allora descritta dal grafico di una funzione $z = f(x,y)$ definita per $(x,y) \in \Omega$. In ogni punto del bordo di Ω , la membrana è fissata al supporto, che è come dire che $f(x,y)$ ha un valore noto per ogni $(x,y) \in \partial\Omega$. *Si dimostra, in base alle leggi fisiche dell'elasticità, che la funzione f è armonica in Ω .* Quindi:

$$\begin{cases} \Delta f(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \Omega \\ f(x,y) \text{ è assegnato} & \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ci si può allora chiedere: assegnata la forma del filo di ferro, cioè assegnata una funzione $g(x, y)$ definita solo su $\partial\Omega$, qual è la forma assunta dalla membrana? E' il grafico della funzione f che soddisfa il *problema al contorno*:

$$\begin{cases} \Delta f(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ f(x, y) = g(x, y) & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Senza pretendere di dimostrare *perché* la forma della membrana in equilibrio deve essere una funzione armonica, osserviamo almeno che è ragionevole che le due curvatures principali della membrana siano di segno opposto (il che è necessario se vogliamo che la somma delle curvatures, ossia il laplaciano, sia nulla): altrimenti significherebbe che in qualche punto interno la membrana forma una “bolla”, perciò non può essere in equilibrio.

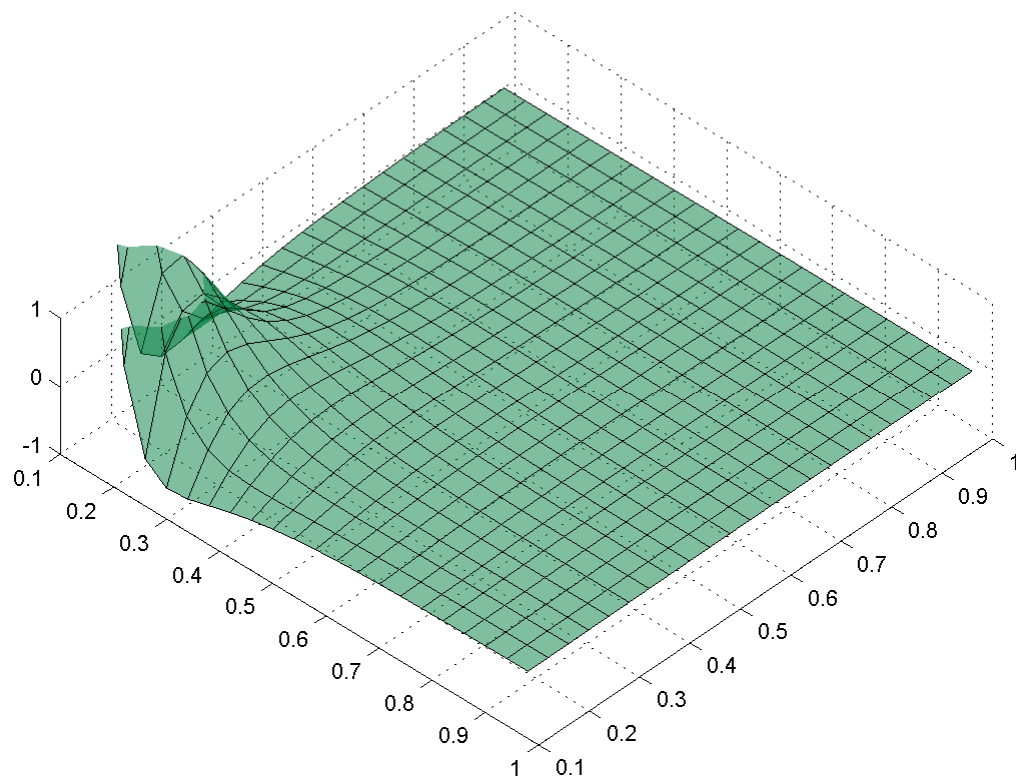
2. Temperatura di una lastra in equilibrio termico. Consideriamo una lastra sottile, piana, omogenea e isotropa dal punto di vista della conduzione del calore, che rappresentiamo come un insieme Ω del piano (x, y) . Supponiamo di essere interessati alla sua temperatura, punto per punto e istante per istante; anzi, per semplificare le cose, supponiamo che la lastra abbia raggiunto l'equilibrio termico, ossia la sua temperatura, in ogni suo punto, non cambi nel tempo. Dunque la temperatura è una funzione $f(x, y)$ definita per $(x, y) \in \Omega$. Si dimostra che, se all'interno della lastra non vi sono sorgenti (o “pozzi”) di calore, la funzione f è armonica in Ω . Supponiamo di poter misurare la temperatura soltanto sul bordo di Ω : possiamo, da questa informazione, calcolare la temperatura in un qualsiasi punto interno? Il problema è matematicamente equivalente a risolvere il *problema al contorno*:

$$\begin{cases} \Delta f(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ f(x, y) = g(x, y) & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

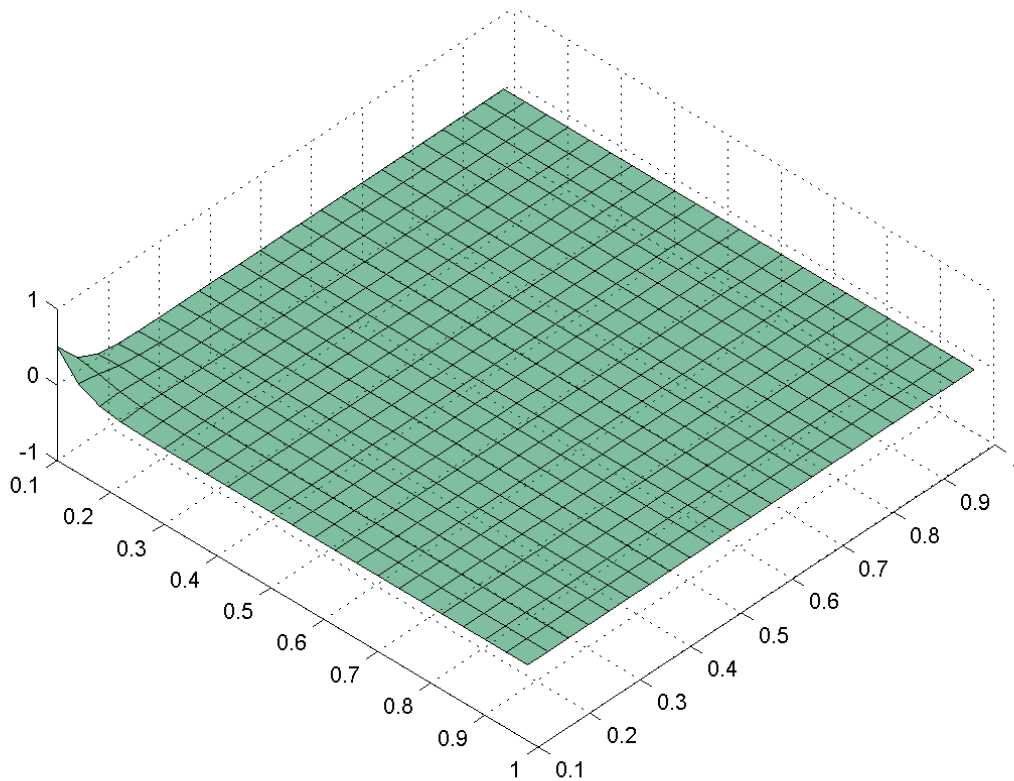
dove g è la temperatura misurata sul bordo.

3. Potenziale gravitazionale. Nella *teoria della gravitazione*, si studia il “campo di forze gravitazionali” che agisce in ogni punto dello spazio, ossia si descrive, per ogni punto dello spazio e per ogni istante, la forza gravitazionale che agirebbe su una massa unitaria posta nel punto stesso. Consideriamo, al solito per semplicità, una situazione schematizzabile come bidimensionale. Dunque, in ogni punto (x, y) e istante t vogliamo descrivere la forza F che agisce su una massa unitaria. La forza è essa stessa un *vettore a due componenti*, $F = (F_1, F_2)$, ma si dimostra che le due componenti possono essere calcolate (non diciamo come!) una volta nota un'*unica funzione* $f(x, y)$, detta potenziale del campo gravitazionale, o *potenziale gravitazionale*. Matematicamente, quindi, il potenziale gravitazionale contiene tutte le informazioni rilevanti nella descrizione del campo stesso. Ora, si può dimostrare che, in condizioni di equilibrio (ossia: quando il campo, punto per punto, non varia più nel tempo), in una regione dello spazio priva di materia, il potenziale gravitazionale è una funzione armonica.

Senza tentare di spiegare perché questo è vero, facciamo un semplice esempio. Consideriamo una massa puntiforme posta nell'origine del piano (x, y) ; il potenziale gravitazionale del campo generato è la funzione $f(x, y) = c \cdot \log(x^2 + y^2)$ (detta “potenziale logaritmico”), dove c è una costante. Calcoliamo ora il laplaciano approssimato assumendo $h = 0.1$, e rappresentiamone il grafico nel quadrato $[0.1, 1] \times [0.1, 1]$:



Facciamo ora lo stesso per $h = 0.01$



Si vede che nella regione del piano priva di massa, si ottiene un laplaciano approssimato del potenziale che è tanto più prossimo a zero quanto più piccolo è h .

- ***Discretizzazione del laplaciano continuo e soluzione approssimata del problema al continuo***

Consideriamo uno dei problemi fisici che hanno come modello il problema di Dirichlet. Risolverli significa risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \forall z \in \partial\Omega & f(z) = g(z) \\ \forall x \in \Omega^0 & \Delta f(x) = 0 \end{cases}$$

La soluzione analitica esatta è possibile solo in caso di domini Ω di forma semplice (ad esempio un rettangolo o un cerchio). In tutti gli altri casi è necessario ricorrere all'approssimazione.

In particolare, noi ricorriamo al laplaciano approssimato, fissato un certo h abbastanza piccolo. Il sistema è dunque ora

$$\begin{cases} \forall z \in \partial\Omega & f_h(z) = g(z) \\ \forall x \in \Omega^0 & (\Delta_h f_h)(x) = 0 \end{cases}$$

Il laplaciano così considerato, benché approssimato, lavora ancora sul continuo. Ci aspettiamo che l' f_h risultante sia una buona approssimazione (ma non discuteremo quanto buona) della soluzione del problema originario.

Si procede dunque a discretizzare lo spazio. Per semplicità, consideriamo come dominio Ω il quadrato unitario: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. La definizione dell'operatore laplaciano in un punto (x, y)

richiede di calcolare il valore della funzione f nel punto stesso e nei quattro punti $(x, y \pm h)$, $(x \pm h, y)$. Dunque anche questi punti dovranno far parte dello spazio discretizzato. E' pertanto naturale discretizzare il dominio Ω secondo una griglia di passo h , ovvero:

$$hZ^2 = \{(nh, mh) : n, m \in Z\}$$

Le coordinate dei punti possono dunque essere solo multipli del passo h , ovvero assumere valori del tipo (nh, mh) . Dunque la funzione f sarà definita unicamente sui punti di questa griglia; con questo l'abbiamo discretizzata.

Definiamo il discretizzato di Ω come:

$$\Omega_h = \{(nh, mh) \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Sia k un intero fissato, in modo che valga la relazione $h = \frac{1}{k}$. Questo dominio si trova sulla griglia

di passo h definita in precedenza, hZ^2 .

E' utile a questo punto introdurre una nuova funzione u , tale che

$$u(n, m) = f(nh, mh) \quad \text{con } n, m \in N$$

Così con questa funzione u andremo a lavorare su un insieme di punti appartenenti a Z^2 , precisamente nell'insieme

$$\Omega_k = \{(n, m) \in Z^2 \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Ci siamo così ricondotti al medesimo dominio della passeggiata aleatoria, effettuando una discretizzazione del problema differenziale. Ora il laplaciano di f da considerare è quello discreto. L'ultimo passo da fare è discretizzare anche il dato al bordo g ; procedendo nel medesimo modo si ottiene $g(nh, mh) = g_k(n, m) \quad \forall (nh, mh) \in \partial\Omega$

Si ha dunque:

$$\begin{cases} \forall z \in \partial\Omega_k & u(z) = g_k(z) \\ \forall x \in \Omega_k^0 & \Delta u(x) = 0 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema, approssimazione di quella del problema originario, è tanto migliore quanto più è piccolo h , cioè quanto più è grande k .

Risolvere il sistema equivale a risolvere un sistema di $(k-1)^2$ equazioni in $(k-1)^2$ incognite, come nel caso della passeggiata aleatoria. Potremmo sfruttare l'approccio probabilistico già enunciato per calcolare u su uno o alcuni punti. In altri termini possiamo pensare di risolvere il sistema come se si trattasse di un problema di Dirichlet originato dal nostro gioco sul punto di prima uscita. Così potremmo simulare un gran numero di passeggiate aleatorie che partono da un punto per noi interessante; facendo la media delle vincite ottenute per ognuna di queste passeggiate otterremo una soluzione approssimata di u per quel punto. Per fare questo possiamo avvalerci di un software informatico, come è indicato nel capitolo seguente.

14. Software di simulazione della passeggiata aleatoria

La passeggiata aleatoria è stata simulata utilizzando due differenti software informatici, con diverse finalità. In particolare è stato utilizzato il foglio di calcolo Microsoft Excel per verificare la legge del valore atteso, mentre è stato utilizzato Microsoft Visual Basic per compilare un software che desse una soluzione approssimata del problema di Dirichlet.

- **Verifica della legge valore atteso:** $E\left(\frac{S_n^2}{n}\right) = 1$

Nel foglio di calcolo è stata creata una tabella, in cui ogni riga corrisponde ad un passo della passeggiata aleatoria. In una colonna è stato inserito un numero casuale, che corrisponde al tiro del dado necessario a spostare la pedina. Nelle altre colonne sono riportate le variabili aleatorie ΔX_n e ΔY_n , che sono funzioni del numero casuale. Queste servono ad aggiornare per ogni passo le variabili aleatorie X_n e Y_n , riportate in altre due colonne di fianco. Queste due infine vengono utilizzate per calcolare lo spostamento quadratico S_n^2 .

All'interno del foglio di calcolo è stata inserita una macro (una routine di Microsoft Visual Basic) che simula un numero di passeggiate aleatorie indicato dall'utente nel momento in cui fa partire il programma. La macro riporta gli spostamenti quadratici finali in una colonna e calcola alla fine il rapporto $\frac{S_n^2}{n}$. Come già indicato in precedenza, la stima che si ottiene è molto buona (per i risultati ottenuti vedi pagina 13).

- **Risoluzione del problema di Dirichlet in alcuni punti**

1. Domini rettangolari

Il software compilato con Microsoft Visual Basic simula invece una passeggiata che parte da un punto indicato dall'utente fino a quando non rileva che la pedina è uscita dal dominio, e trova la vincita ottenuta. Il programma passa poi a simulare un'altra passeggiata, che parte dallo stesso punto. Quando è stato raggiunto il numero di simulazioni indicato dall'utente, il programma procede a calcolare la media delle vincite. Il risultato così ottenuto è la soluzione approssimata del problema di Dirichlet in quel punto.

Entriamo più nel dettaglio del suo funzionamento.

Il programma lavora sul dominio quadrato Ω_k di cui l'utente indica all'inizio il numero di passi k in cui intende suddividere il lato. L'utente indica anche il punto di partenza della passeggiata; il sistema di riferimento ha l'origine posizionata in un vertice del quadrato, con gli assi coincidenti con i due lati del quadrato che escono dal vertice stesso. Il vertice opposto a quello coincidente con l'origine avrà dunque coordinate (k, k) .

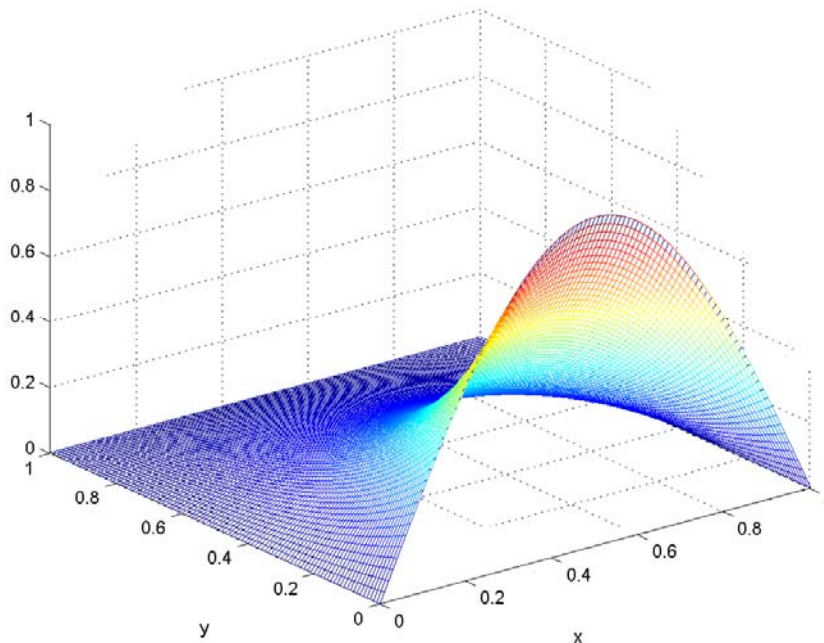
Il programma crea una matrice che contiene il dato al bordo f . A titolo di esempio, abbiamo considerato il seguente dato al bordo:

$$\begin{cases} f(0, y) = f(1, y) = f(x, 1) = 0 & \forall x \in (0, 1), y \in (0, 1) \\ f(x, 0) = \sin(\pi x) & \forall x \in (0, 1) \end{cases}$$

Questa situazione particolare consente infatti di confrontare i dati ottenuti dal programma con la soluzione esatta, che è nota essere

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \frac{e^{\pi(1-y)} - e^{-\pi(1-y)}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$$

In generale infatti la formula risolutiva del problema di Dirichlet sul rettangolo è nota. Questa funzione u ha il seguente grafico (si noti che il suo valore al bordo del dominio corrisponde a quello inserito nella simulazione, in quanto è nullo su tre lati, mentre sul quarto è una sinusoide):



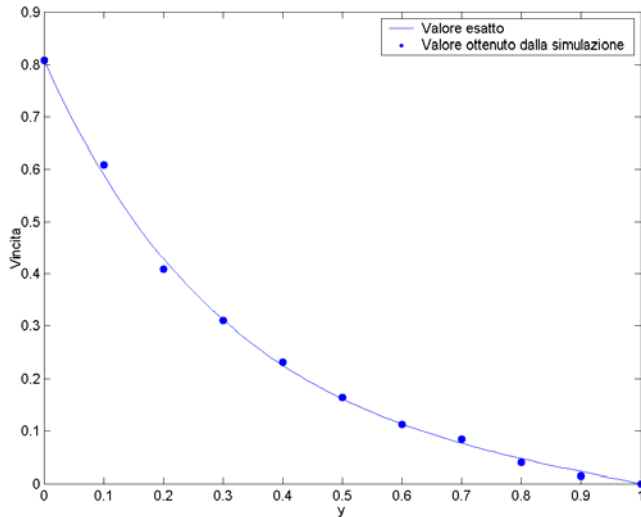
Questo dato al bordo è definito sul continuo, con le coordinate che variano da 0 a 1, mentre il programma lavora sul dominio discretizzato sul reticolo Z^2 . Pertanto per confrontare le coordinate, quelle relative al programma vanno divise per k .

Dopo aver inserito nella matrice il dato al bordo, il programma procede alla simulazione della passeggiata aleatoria da un punto x definito dall'utente. Per ognuna delle passeggiate simulate trova il punto di prima uscita. Per far questo scorre la passeggiata passo dopo passo, trovando il primo punto P che verifica una delle quattro condizioni seguenti:

$$x_p = 0 \qquad x_p = k \qquad y_p = 0 \qquad y_p = k$$

Esso sarà il punto di prima uscita. Ora il programma determina la vincita estraendo dalla matrice il dato al bordo e aggiornando la somma delle vincite finora ottenute; a questo punto Excel procede con un'altra passeggiata aleatoria con partenza nello stesso punto x . Alla fine non rimane che calcolare la media delle vincite, dividendo la somma ottenuta per il numero di prove.

Il numero così trovato può essere confrontato con la soluzione esatta. Nelle nostre prove abbiamo suddiviso il lato del quadrato in 10 passi e abbiamo effettuato 500 passeggiate aleatorie. Perché il confronto fosse più significativo, nelle prove abbiamo calcolato il valore della funzione lungo una sezione, effettuata con il piano di equazione $x = 0.3$ (nel sistema di riferimento continuo), confrontando i risultati ottenuti con il loro valore esatto. In particolare nel grafico seguente la linea continua indica il valore esatto, mentre i punti il loro valore calcolato facendo uso del nostro programma. Come si vede la stima ottenuta è buona.



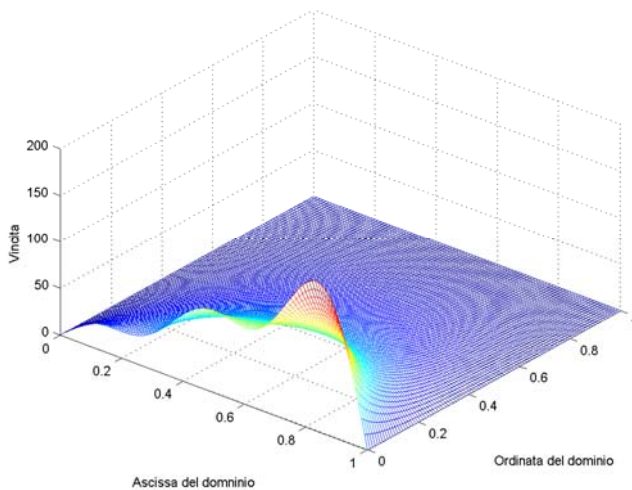
Riportiamo anche i dati ottenuti dalla simulazione effettuata su un altro dato al bordo, precisamente il seguente:

$$\begin{cases} f(0, y) = f(1, y) = f(x, 1) = 0 & \forall x \in (0, 1), y \in (0, 1) \\ f(x, 0) = \sin(\pi x) - \frac{1}{2} \sin(2\pi x) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x) - \frac{1}{4} \sin(4\pi x) + \frac{1}{5} \sin(5\pi x) \end{cases}$$

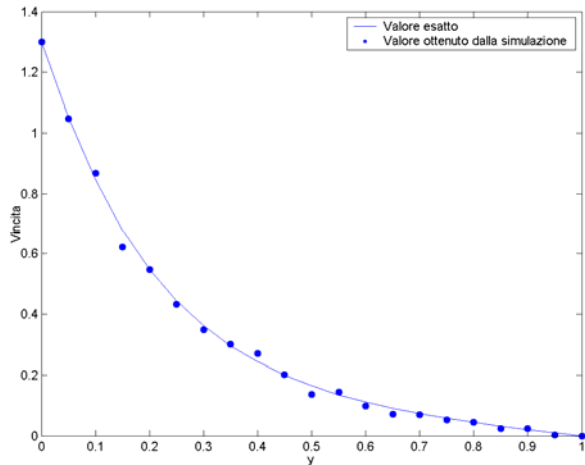
Anche di questo dato al bordo è possibile calcolare la soluzione esatta, che è la seguente:

$$u(x, y) = \operatorname{csch}(\pi) \sin(\pi x) \sinh[\pi(1-y)] - \frac{1}{2} \operatorname{csch}(2\pi) \sin(2\pi x) \sinh[2\pi(1-y)] + \frac{1}{3} \operatorname{csch}(3\pi) \sin(3\pi x) \sinh[3\pi(1-y)] + \\ - \frac{1}{4} \operatorname{csch}(4\pi) \sin(4\pi x) \sinh[4\pi(1-y)] + \frac{1}{5} \operatorname{csch}(5\pi) \sin(5\pi x) \sinh[5\pi(1-y)]$$

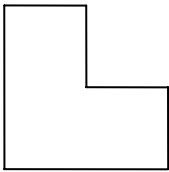
Essa genera il seguente grafico:



Come prima, abbiamo calcolato i valori lungo una sezione, questa volta di equazione $x = 0.75$. I dati ottenuti sono i seguenti:



2. Domini non rettangolari



Il programma è in grado di lavorare anche su domini più generali del rettangolo come, ad esempio un dominio a L del tipo a fianco. Esso è delimitato da sei “direzioni”, tre orizzontali e tre verticali. Le tre orizzontali, nello stesso sistema di riferimento usato in precedenza, hanno rispettivamente equazioni $x = 0$, $x = a$, $x = k$, mentre le tre verticali hanno equazione $y = 0$, $y = b$, $y = k$. Questi parametri vengono specificati dall'utente all'apertura del programma.

L'esempio del dominio a L è semplice ma significativo perché in questo caso non sono note formule risolutive esatte, quindi in questo caso la soluzione approssimata (ottenuta con il nostro metodo o con un'altra) è l'unica calcolabile.

Il procedimento per determinare il punto di prima uscita è un po' più laborioso, ma sostanzialmente identico. Ora però il punto di prima uscita P è quello che soddisfa una delle sei condizioni seguenti:

$$x_p = 0 \quad x_p = k$$

$$x_p = a \quad \text{se } y_p \geq b$$

$$y_p = 0 \quad y_p = k$$

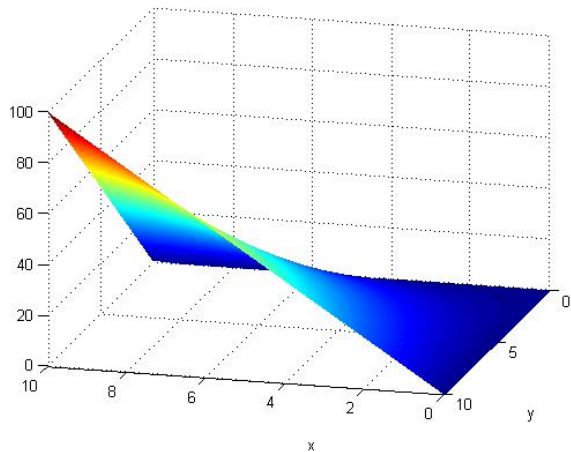
$$y_p = b \quad \text{se } x_p \geq a$$

Individuato il punto di prima uscita, il programma procede come nel caso precedente.

Ora, come detto sopra la soluzione esatta non è nota nel caso generale, cioè non è nota quale sia la funzione che risolve il problema di Dirichlet noto il dato al bordo. Per verificare la bontà del nostro software di simulazione possiamo però mettere in atto il procedimento inverso, cioè partire da una funzione armonica che è soluzione del problema di Dirichlet pur di definire opportunamente il dato al bordo. Andremo a calcolare i valori della funzione armonica sui lati del dominio e li porremo come dati al bordo. Per i risultati dei teoremi esposti nei punti precedenti, la funzione che risolve il problema con questo dato al bordo è quella da cui siamo partiti; dunque abbiamo un mezzo per verificare quanto sia valida l'approssimazione del nostro programma.

Consideriamo ad esempio la seguente funzione, di cui riportiamo anche il grafico:

$$u(x, y): z = xy$$



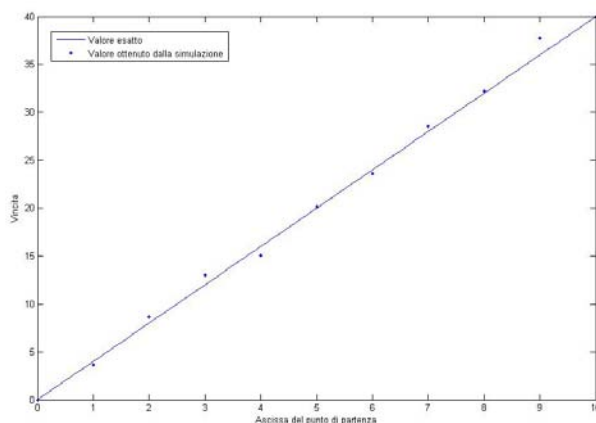
Come dominio abbiamo considerato una L in cui i parametri precedentemente esposti hanno i seguenti valori:

$$a = 3 \quad b = 7 \quad k = 10$$

Pertanto la funzione u ha le seguenti intersezioni con i bordi del dominio:

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u(x,10) = 0 \\ u(10,y) = 10y \quad \text{con } 0 \leq y \leq 7 \\ u(x,7) = 7x \quad \text{con } 3 \leq x \leq 10 \\ u(3,y) = 3y \quad \text{con } 7 \leq y \leq 10 \\ u(x,10) = 10x \quad \text{con } 0 \leq x \leq 3 \\ u(0,y) = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso abbiamo preceduto con una sezione lungo un piano, parallelo questa volta all'asse x , di equazione $y = 4$. I dati ottenuti sono i seguenti:

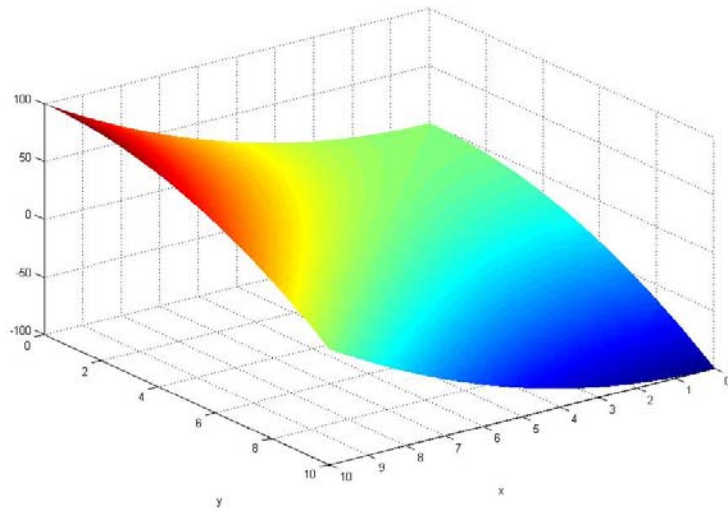


Come si vede, anche in questo caso l'approssimazione ottenuta è buona.

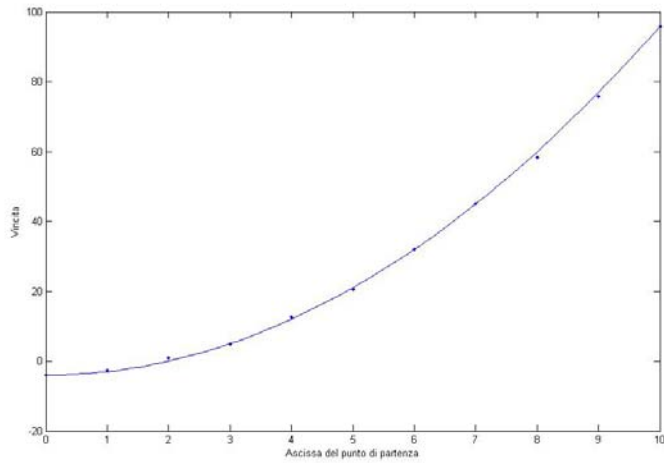
Riportiamo anche l'esempio ottenuto con un altro dato al bordo, derivato questa volta dalla funzione

$$u(x,y): z = x^2 - y^2$$

Il cui grafico è:



Questa volta abbiamo operato una sezione lungo il piano di equazione $y = 2$, ottenendo i seguenti dati:



15. Conclusioni.

Nel nostro lavoro siamo partiti dall'esame del moto browniano e siamo quindi passati a considerare, per analogia, la passeggiata aleatoria di una pedina nel piano, che abbiamo studiato sia teoricamente che mediante simulazioni. Dallo studio della passeggiata aleatoria siamo passati a quello del laplaciano discreto, e quindi a quello del laplaciano (approssimato) continuo, operatore che compare in molti modelli fisici interessanti. Abbiamo quindi sviluppato un software che, simulando la passeggiata aleatoria in un dominio piano, consente di valutare numericamente la soluzione di un problema di Dirichlet per il laplaciano discreto, con considerazioni probabilistiche. A sua volta, questa soluzione si può vedere come soluzione approssimata di un problema di Dirichlet per il laplaciano continuo, soluzione che riveste vari significati fisici. Il software fornisce una soluzione approssimata anche in casi in cui la soluzione esatta non è disponibile. Inoltre, qualora la soluzione esatta sia disponibile, il raffronto tra questa e la soluzione approssimata mostra un errore piuttosto contenuto.

16. Bibliografia.

- M. Bramanti, Calcolo delle probabilità e statistica, ed. Esculapio.
- A. Einstein, Investigation on the theory of the brownian movement, edited with notes by R. Furth, Dover publications.
- A. Einstein, L. Infeld, L'evoluzione della fisica, Boringhieri.

17. Ringraziamenti

Desideriamo vivamente ringraziare:

- il Professor Marco Bramanti, del Politecnico di Milano, la Professoressa Paola Balzarotti e il Professor Paolo Teruzzi, dell'Istituto don Gnocchi, per l'insostituibile guida, i preziosi consigli e l'infinita pazienza che hanno reso possibile questo approfondimento;
- il nostro preside, Professor Franco Viganò, per il suo appoggio a questa iniziativa;
- il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano, per l'ospitalità e la promozione dello stage;
- l'Istituto don Gnocchi che ci ha portato e sopportato fin qui.

APPENDICE 1 – IL MOTO BROWNIANO

Riprendiamo di seguito la dimostrazione di Einstein, pubblicata in un articolo nel 1908¹ con cui si arriva a dedurre le relazioni 1) e 2) dell' introduzione. Per illustrare il ragionamento che seguiremo, riportiamo le parole dello stesso Einstein:

“Prima investigheremo come il processo di diffusione in una soluzione di due liquidi, tra loro non miscibili, dipende dalla distribuzione della pressione osmotica nella soluzione e dalla mobilità della sostanza disciolta nella soluzione. (...)Successivamente assoceremo il processo di diffusione con il moto irregolare delle molecole disciolte.”

Consideriamo dapprima un cilindro Z riempito con una soluzione. Supponiamo che esso sia diviso in due camere da un pistone mobile libero di scorrere senza attrito (v. fig. 1). Sul pistone agiranno, se la concentrazione del soluto in A è maggiore che in B, due forze: $F = p \cdot S$ e $F = -p' \cdot S$ dove p e p' sono le due differenti pressioni osmotiche all'interno delle camere A e B, e S è la misura della sezione del recipiente. Per tenere il pistone in equilibrio sarà necessario applicare su di esso una forza esterna pari a $(p - p') \cdot S$.

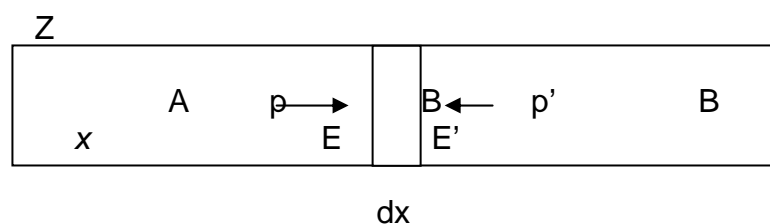


Fig.1

Chiamiamo x la distanza da un estremo del cilindro ad E ed $x+dx$ la distanza di E' dal medesimo estremo (come raffigurato nella figura). Allora $(p - p') \cdot S$ rappresenta la forza che agisce sul volume $V=S \cdot dx$ della sostanza disciolta.

Pertanto la pressione K che agisce sull'unità di volume della medesima sostanza sarà espressa dalla seguente relazione:

$$K = \frac{(p - p')}{S \cdot dx} = -\frac{1}{S} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

ove abbiamo indicato con dp la differenza tra le pressioni osmotiche alle sezioni E ed E' rispettivamente.

Definiamo ora come concentrazione C di una sostanza disciolta in un solvente il rapporto tra il numero di moli n e il volume V occupato, $C = \frac{n}{V}$. Per la legge dei gas ideali $pV = nRT$. Poiché $n = C \cdot V$ possiamo scrivere che $pV = C \cdot V \cdot RT$ cioè, semplificando V , $p = C \cdot RT$. Poiché supponiamo che la temperatura T del sistema rimanga costante possiamo scrivere:

¹ A.Einstein, Elementare Theorie der Brownschen Bewegung, Zeitschrift für Elektrochemie und angewandte physikalische Chemie, **14** (1908) pp.235-239

$$\frac{dp}{dx} = RT \frac{dC}{dx}$$

e l'equazione (1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$K = -\frac{RT}{S} \cdot \frac{dC}{dx} \quad (2)$$

È interessante notare che l'equazione (2) evidenzia il legame tra pressione che agisce per unità di volume e il gradiente di concentrazione $\frac{dC}{dx}$.

Se ora immaginiamo che ogni molecola del soluto si muova nel solvente come un corpo in un mezzo viscoso, la forza F agente su di essa è proporzionale alla velocità v raggiunta secondo la relazione seguente

$$F = v \cdot \mathfrak{R} \quad (3)$$

Se supponiamo che la molecola sia approssimabile a una sferetta di raggio ρ , in accordo con la legge di Stokes, il coefficiente \mathfrak{R} assume la forma $\mathfrak{R} = 6\pi\eta\rho$, dove η è il coefficiente di viscosità del mezzo.

Dopo un tempo t , pertanto, la molecola di soluto si muoverà nel solvente di moto rettilineo uniforme. Se con N_{av} si indica il numero di Avogadro, allora il soluto è composto da un numero di molecole N pari a $(N_{AV} \cdot n)$. Se la forza che agisce su ogni singola molecola è espressa dalla (3) possiamo dire che la pressione che agisce sull'unità di volume (contenente $\frac{(N_{AV} \cdot n)}{V}$ molecole) è:

$$K = \frac{v \cdot \mathfrak{R} \cdot N_{av} n}{S \cdot V} \quad (4)$$

confrontando l'equazione (2) con l'equazione (4), si ha che

$$-RT \cdot \frac{dC}{dx} = \frac{v \cdot \mathfrak{R} \cdot N_{AV} n}{V} \quad (6)$$

Proviamo ora a chiederci quante sono le molecole del soluto che, muovendosi tutte nella stessa direzione, attraversano una sezione S del recipiente nell'intervallo di tempo dt . Possiamo affermare che sono tutte quelle che si trovano ad una distanza $dx = v dt$ dalla sezione S : devono infatti raggiungere s nel tempo dt . Pertanto sono quelle contenute nel volume $S \cdot v \cdot dt$. Ma il numero di molecole contenuto nel volume $S \cdot v \cdot dt$ è dato da: $\frac{n \cdot N_{AV}}{V} \cdot S v dt$ essendo $\frac{n \cdot N_{AV}}{V}$ il numero di molecole del soluto per unità di volume. Se ora vogliamo esprimere il numero delle molecole della sostanza disciolta che, per diffusione, attraversano la sezione del recipiente nell'unità di tempo, possiamo dire che è rappresentato da: $\frac{n \cdot N_{AV}}{V} \cdot S v$. Pertanto $\frac{n \cdot N_{AV}}{V} \cdot v$ rappresenta il numero delle molecole della sostanza disciolta che attraversano la sezione unitaria del recipiente, nell'unità di tempo.

Ora riscrivendo opportunamente la (6) otteniamo:

$$\frac{n N_{AV} \cdot v}{V} = -\frac{RT}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{dC}{dx} \quad (7)$$

E dividendo per N_{AV} otteniamo:

$$\frac{n v}{V} = -\frac{RT}{\mathfrak{R} \cdot N_{AV}} \cdot \frac{dC}{dx} \quad (8)$$

Osserviamo che il termine $\frac{n v}{V}$ a primo membro rappresenta la massa della sostanza disciolta (in moli) che, per diffusione, attraversa la sezione unitaria del recipiente nell'unità di tempo mentre a secondo membro troviamo il gradiente di concentrazione $\frac{dC}{dx}$.

La (8) non è altro che l'equazione che descrive un processo di diffusione attraverso una certa sezione S causato da un gradiente di concentrazione dC/dx . Il fattore moltiplicativo $\frac{RT}{N_{av} \mathfrak{R}}$ è il coefficiente di diffusione della soluzione.

Se esplicitiamo il valore di \mathfrak{R} tenendo conto della legge di Stokes otteniamo:

$$D = \frac{RT}{N_{av} 6\pi\eta\rho} \quad (9)$$

Si può notare che il coefficiente di diffusione D dipende esclusivamente dalla temperatura del mezzo e dal raggio delle molecole del soluto. Per una temperatura T fissata, D varia solo in dipendenza da ρ : al crescere della dimensione delle molecole il coefficiente di diffusione diminuisce e il fenomeno di diffusione è meno significativo. Al contrario, per molecole di dimensione fissata, è evidente che al crescere della temperatura aumenta il coefficiente di diffusione e quindi l'agitazione termica delle molecole.

L'equazione (6) può essere più semplicemente riscritta come

$$C \cdot v = -D \cdot \frac{dC}{dx} \quad (10)$$

Ora cercheremo di esprimere il termine $C \cdot v$ anche per altra via, il che permetterà di ottenere un'altra interessante espressione per il coefficiente di diffusione.

Dalla relazione (10) si può osservare, tra l'altro, il legame tra la velocità delle molecole del soluto, la concentrazione e il gradiente di concentrazione del mezzo.

L'equazione (10) è stata ottenuta mediante un approccio macroscopico al problema; è altresì possibile affrontarlo da un punto di vista microscopico. Benché sia impossibile descrivere analiticamente il moto di ogni singola molecola, immaginiamo tuttavia di osservare una certa sezione E del cilindro rappresentato in figura 2. Le molecole in soluzione si muovono di moto caotico ma per semplicità supponiamo che si muovano solo in direzione orizzontale (chiameremo l'asse orizzontale asse delle x). Statisticamente possiamo affermare che vi saranno alcune molecole che attraverseranno la sezione E da sinistra verso destra e, altrettante che la attraverseranno da destra verso sinistra. Supponiamo di conoscere le coordinate delle molecole al tempo t e anche al tempo $t + \tau$, dove τ indica un intervallo di tempo così piccolo da poter ritenere che la concentrazione della soluzione sia praticamente inalterata.

Durante il tempo τ la coordinata x di ogni molecola risulterà variata di un certo incremento δx di modulo Δ . Osserviamo che la somma vettoriale di tutti gli incrementi di spostamento δx è pari a 0, mentre è diverso da zero il valor medio dei moduli dei δx .

Le molecole nel cilindro che attraversano un'ipotetica sezione E nel tempo τ

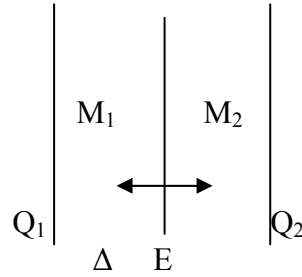


Fig 2

dovranno essere situate ad una distanza da E non maggiore di Δ . Saranno pertanto le molecole comprese tra i piani Q_1, Q_2 ed E. Dal momento che solo metà delle molecole avranno lo spostamento positivo (e quindi si muovono verso destra) il numero di molecole che attraverserà il piano E nel tempo τ è:

$$\frac{1}{2} C_1 \Delta \cdot S$$

dove C_1 è la concentrazione di molecole nella zona M_1 . Analogamente le molecole che attraversano la sezione da destra a sinistra saranno:

$$\frac{1}{2} C_2 \Delta \cdot S$$

Avendo indicato con C_2 la concentrazione di molecole nella zona M_2 .

La quantità di sostanza che attraverserà da destra a sinistra il piano E durante il tempo τ sarà uguale a

$$\frac{1}{2} \Delta \cdot S (C_1 - C_2) \quad (11)$$

Ricordiamo che nella (10) abbiamo detto che la quantità di soluto che, nell'unità di tempo attraversa la sezione unitaria del recipiente è data da $C \cdot v$, dove C è la concentrazione del soluto e v la velocità di diffusione. Perciò CvS è la quantità di soluto che, nell'unità di tempo, attraversa la sezione S del recipiente. Possiamo perciò riscrivere la (11) come segue:

$$C \cdot v \cdot S = \frac{1}{2} \Delta \cdot S (C_1 - C_2) \quad (12)$$

Poiché Δ è una quantità molto piccola possiamo scrivere:

$$\frac{C_2 - C_1}{\Delta} \cong \frac{dC}{dx}$$

e, indicando con $\frac{dC}{dx}$ il tasso di variazione di concentrazione C rispetto alla posizione x

$$C_1 - C_2 \cong -\Delta \frac{dC}{dx}$$

perciò, sostituendo nella (12), la quantità di sostanza che attraverserà E in un intervallo di tempo unitario è uguale a

$$CvS = -\frac{1}{2} \cdot S \cdot \frac{\Delta^2}{\tau} \cdot \frac{dC}{dx} \quad (13)$$

È immediato osservare che il rapporto $\frac{n}{\tau}$ è pari a $\frac{nv}{V} \cdot S$. Vale perciò la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{n}{\tau} = \frac{nv}{V} \cdot S = Cv \cdot S = -\frac{1}{2} \cdot S \cdot \frac{\Delta^2}{\tau} \cdot \frac{dC}{dx},$$

da cui si ricava

$$C_V = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{\tau} \cdot \frac{dC}{dx} \quad (14)$$

Confrontando l'equazione (14) con la (6) abbiamo ottenuto un altro valore del coefficiente di diffusione D

$$D = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\tau} \quad (15)$$

ove Δ^2 è lo spostamento quadratico medio di una molecola durante un certo tempo τ lungo l'asse x.

Conclusione

Dal confronto fra le equazioni (10) e (15) otteniamo

$$\Delta = \sqrt{\frac{2RT\tau}{N_{av} \mathfrak{R}}} \quad (16)$$

Se la molecola del soluto ha dimensioni lineari paragonabili a quelle delle molecole del solvente possiamo dare a \mathfrak{R} il valore $6\pi\eta\rho$ ottenendo:

$$\Delta = \sqrt{\frac{RT\tau}{N_{av} 3\pi\eta\rho}} \quad (17)$$

Da questa equazione si ha la possibilità di veder come, fissati i parametri dipendenti dal mezzo in cui si muove il soluto, ρ rimane l'unico parametro da cui dipenda lo spostamento medio delle molecole stesse. Notiamo inoltre che, affinché lo spostamento sia osservabile attraverso un microscopio, è necessario che le dimensioni lineari delle molecole siano dello stesso ordine di grandezza del loro spostamento quadratico medio.

Facciamo notare la dipendenza di Δ dalla radice quadrata di τ : in effetti la molecola di soluto si muove nel solvente di moto caotico e il valor medio del suo spostamento è zero. I moduli delle componenti degli spostamenti in due intervalli di tempo successivi, infatti, in alcuni casi vanno a sommarsi in altri a sottrarsi. Lo "spostamento quadratico medio", invece, è la media dei quadrati dei singoli spostamenti e pertanto ottenuto come somma di quantità tutte positive. E' ragionevole pensare che possa essere proporzionale a τ .

Nel seguente esempio riportiamo lo spostamento quadratico medio Δ calcolato per una molecola di $1\mu\text{m}$ di diametro che si muove per 1 secondo in acqua, a temperatura ambiente.

Consideriamo: $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mole K})$ $\eta = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m s})$

$T = 290 \text{ K}$ $\rho = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$N_{av} = 6,24 \cdot 10^{23}$ $\tau = 1 \text{ s}$

Questi dati sostituiti nell'equazione (10) conducono ad un valore dello spostamento medio di una molecola pari a:

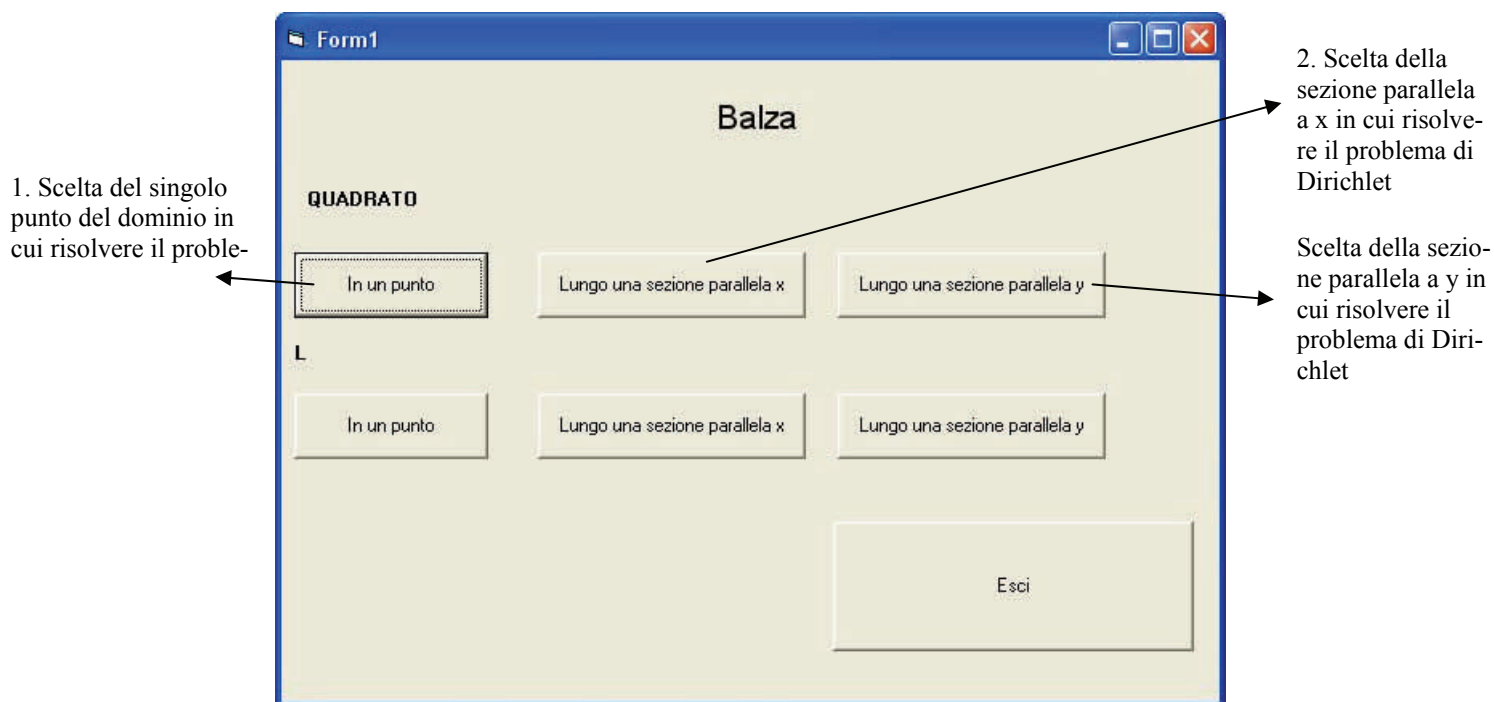
$$\Delta = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Questo risultato è soggetto a un errore che è di circa $\pm 25\%$, causato anche dalla precisione con cui a quel tempo erano conosciuti i valori di certe costanti quali, ad esempio, N_{AV} .

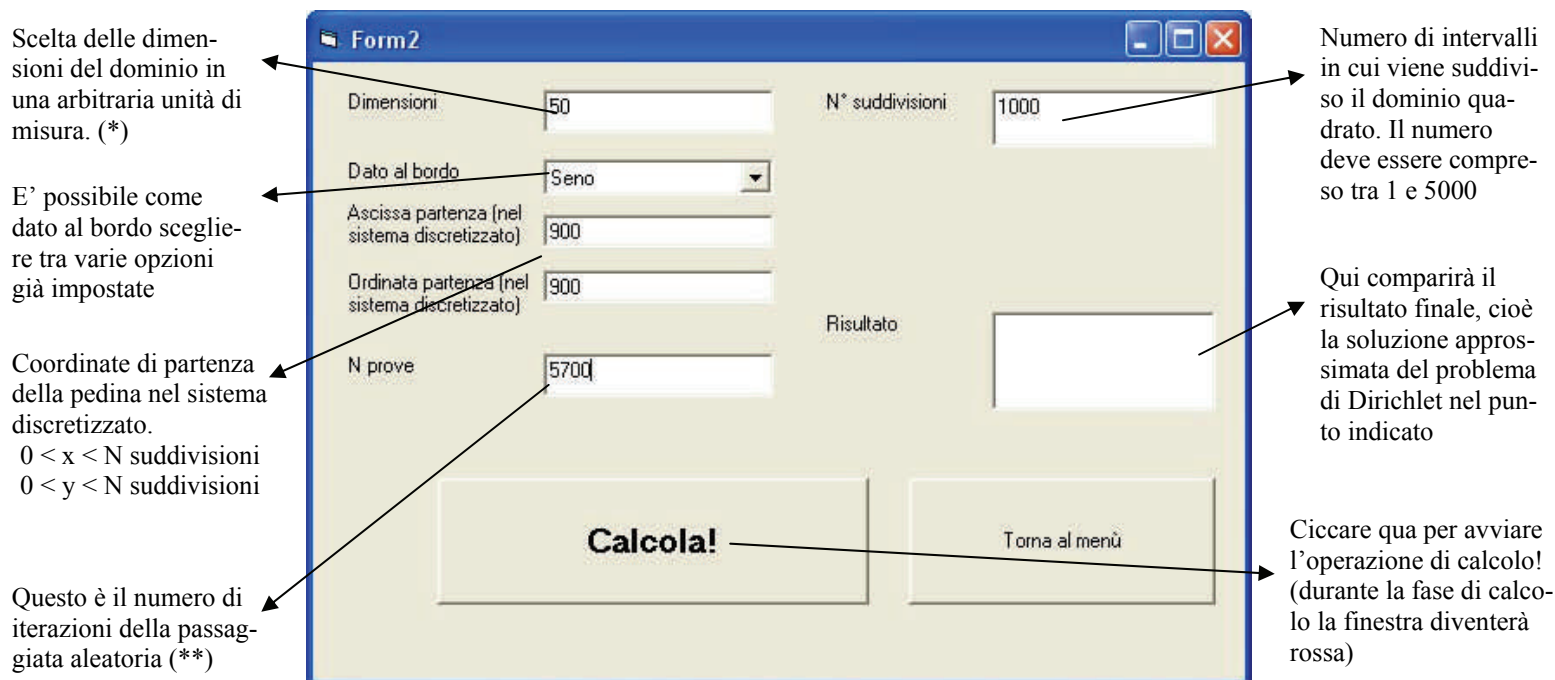
E' inoltre interessante paragonare il valore dello spostamento quadratico medio di una particella di soluto in un solvente, ottenuto attraverso l'equazione della diffusione con quello ricavato utilizzando la (10). Supponiamo che, per una certa sostanza in soluzione sia noto il coefficiente di diffusione D . Ricordando che, dalla (15) il coefficiente di diffusione è legato allo spostamento quadratico medio della molecola possiamo calcolare lo spostamento quadratico medio previsto. Nel caso dello zucchero che diffonde in acqua a temperatura ambiente ($D=3.8 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$) otteniamo : $\Delta = 27.6 \text{ }\mu\text{m}$. Poiché il diametro di una molecola di zucchero è dell'ordine di grandezza di 10^{-12}m , cioè circa 1000 volte più piccola della particella del diametro di 1 micron. Pertanto dobbiamo attenderci un valore di Δ per lo zucchero che sia $\sqrt{1000}$ volte più grande di quello calcolato per la particella del diametro di 1 micron. Come si vede è proprio ciò che otteniamo. L' equazione (10), infine, è stata utilizzata anche per affinare i valori di codeste costanti partendo dall' ipotesi in cui tutti gli altri valori siano noti. Ad esempio nel 1908 Perrin migliorò la precisione con la quale era noto il numero di Avogadro.

APPENDICE 2 - SOFTWARE BALZA - GUIDA ALL'USO

Nella prima schermata è possibile impostare le caratteristiche geometriche del dominio, che può essere quadrato o “a L”. Si noti che le stesse opzioni presenti per un dominio si hanno anche per l'altro:



1. Selezionando la voce “in un punto” per il quadrato:



(*) La misura del lato l del quadrato ($l > 0$) viene successivamente “discretizzata” in base al numero delle suddivisioni. Essa determina il passo della griglia, che è necessario conoscere per impostare il valore della funzione sui punti del bordo.

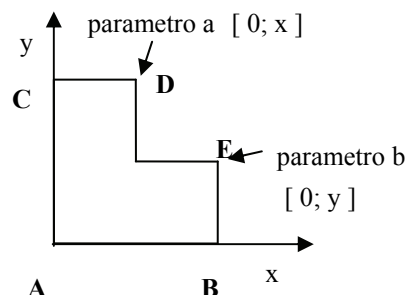
(**) “N prove” a priori può essere un qualsiasi numero intero. Si consideri che nelle nostre simulazioni abbiamo impostato “N prove” = 1000

2. Scegliendo invece di risolvere il problema di Dirichlet lungo una sezione ci troviamo di fronte alle medesime opzioni, salvo la scomparsa dell'ascissa del punto di partenza che viene sostituita dalla scelta della sezione. Il risultato costituito da un insieme di valori viene scritto in un opportuno file di testo, come indicato nella finestra.

Si ricorda che il numero deve essere compreso tra 1 e 5000

3. Se come prima opzione venisse scelto un dominio a L “in un punto”, si otterrebbe la figura seguente:

Numero degli intervalli in cui viene suddiviso il lato AB (*)



Numero degli intervalli in cui viene suddiviso il lato AC (*)

Misura dei segmenti CD e BE (si tratta di due valori tali che $0 < CD < \text{dimensioni } x$, $0 < BE < \text{dimensioni } y$)

Misura dei segmenti AB e AC (in una arbitraria unità di misura)

$0 < x < N$ suddivisioni x
 $0 < y < N$ suddivisioni y

(*) Come prima, questo numero deve essere compreso tra 1 e 5000